

Ständer, W. (1967): Das Gefrierverfahren im Schacht-, Grund- und Tunnelbau. – In: Baur, H., et al. (eds): Die Anwendung der Kälte in der Verfahrens- und Klimatechnik, Biologie und Medizin: Sicherheitsvorschriften 12. – p. 173-227, 34 Abb., 3 Tab.; Berlin (Springer).

Das Gefrierverfahren im Schacht-, Grund- und Tunnelbau.

Von

Dr.-Ing. W. Ständer

Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Mit 34 Abbildungen

A. Wesen und Anwendung des Verfahrens.

I. Allgemeines.

Eine bedeutende Anwendung der Kältetechnik stellt im Bauwesen das Gefrierverfahren dar. Es wurde von POETSCH im Jahr 1883 erfunden und bereits ein Jahr später zum erstenmal praktisch erprobt. Die Anregung zu seiner Erfahrung erhielt er durch seine Tätigkeit als Markscheider beim Schachtbau. Hier hatte man oft ohne Erfolg versucht, mit den verschiedensten Methoden (z. B. Grundwasserabsenkung) Schwimmsandschichten zu durchfahren. Der Patentanspruch von POETSCH enthält die wesentlichen Merkmale des Verfahrens und lautet folgendermaßen¹:

„Eine Methode, um Bohrlöcher, Schächte und Ausschachtungen im Wasser oder im schwimmenden Gebirge leicht, schnell und lohrecht abzuteufen und alte Schächte nachzuführen, charakterisiert durch die Anwendung einer in sich geschlossenen Mauer aus Eis oder gefrorenem schwimmendem Gebirge, welche genügend stark ist, um allem Seitendruck und Sohlendruck zu widerstehen, und wobei diese Eis- oder Frostmauer mit Hülfe einer Anzahl Röhren, welche in passender Entfernung niedergebracht sind und in denen tief erkaltete Luft oder tief erkaltete Flüssigkeit circulirt, hergestellt wird.“

In seiner Grundkonzeption wurde das von POETSCH entwickelte Verfahren bis heute nicht wesentlich verändert. Bei manchen Schachtbauvorhaben ist das Gefrierverfahren die einzige mögliche und sichere Abteufmethode. Hier betragen die Gefrierteufen meist einige 100 Meter. Es wird vorzugsweise dann angewandt, wenn andere Bauweisen wie z. B. das Senkschachtverfahren für weiche oder das Schachtbohren für härtere Schichten versagen. So wurden bereits während der ersten achtzehn Jahre nach der Erfindung 87 Gefrierschächte fertiggestellt oder begonnen.

Inzwischen wurde das Verfahren, bedingt durch bedeutende Fortschritte in der Bohrtechnik, z. B. Spülen, durch rationellere Arbeitsweise und vor allem durch wissenschaftliche Untersuchungen der Probleme soweit verbessert, daß es heute in vielen Fällen auch mit anderen Verfahren konkurrieren kann. Während

¹ HOFFMANN, D.: Acht Jahrzehnte Gefrierverfahren nach POETSCH. Essen 1962, S. 143.

im Schachtbau schon beste Erfahrungen vorliegen, hat das Gefrierverfahren für mitteltiefe Gründungen (60 m) noch nicht die zu erwartende Anwendung gefunden. In Zukunft wird aber insbesondere für die Untertunnelung von Verkehrswegen der Großstädte auch das Gefrierverfahren als Bauweise von Bedeutung sein. Die Nachteile lagen bisher einerseits in den hohen Kosten und andererseits in der langen Gefrierzeit. Der zeitliche Verlauf des Gefrierens kann aber neuerdings mit großer Sicherheit vorausgesagt werden (s. Abschn. B).

Vergleicht man jedoch die Gefriermethode mit anderen Bauweisen, dann zeigen sich in mancherlei Hinsicht große technische Vorteile¹:

1. Gegenüber der *Grundwasserabsenkung*: Der Grundwasserspiegel wird nicht beeinflußt, da das Wasser nicht entzogen wird. Damit bleibt die Lagerung des Baugrundes ungestört erhalten und es entstehen keine Setzungen.

2. Gegenüber der *Spundwand*: Belästigungen der Anlieger durch Lärm und Erschütterungen entfallen weitgehend. Die Frostwand läßt sich ohne erhebliche Steigerung des Kostenaufwandes tiefer gründen (z. B. bis zur ersten wasserundurchlässigen Schicht). Sie ist vollkommen dicht, so daß eine Wasserhaltung entfällt. Bei entsprechender Frostwandstärke können höhere Seitendrücke aufgenommen werden.

3. Gegenüber dem *Druckluftverfahren*: Das Gefrierverfahren ist nur dann im Nachteil, wenn extrem große Grundwasserströmungen vorliegen. Selbst im Vergleich zum Schildvortrieb, also bei horizontaler Durchörterung, kann sich die Gefriermethode als vorteilhaft erweisen.

4. Gegenüber dem *Injizieren*: Auch im Vergleich zum Injizieren hat die Gefriermethode den Vorteil absoluter Wasserdichtigkeit. In Amerika, wo man das Gefrierverfahren bisher wenig anwandte, geht man in jüngster Zeit immer mehr dazu über, selbst bei standfestem Gebirge das Gefrieren dem Injizieren vorzuziehen, sofern es sich um Schutz gegen Wasserandrang handelt.

Hingegen sind als Nachteile zu nennen:

1. Gegenüber dem *Senkverfahren*: Mit dem Brunnenabsenk- bzw. Senkschachtverfahren, sofern diese Techniken anwendbar sind, kann das Gefrierverfahren in den meisten Fällen weder technisch noch wirtschaftlich konkurrieren.

2. Gegenüber dem *Vakuumverfahren*: Das Vakuumverfahren ist dem Gefrierverfahren zwar nicht technisch, in vielen Fällen jedoch wirtschaftlich überlegen, vor allem, wenn es sich nicht um allzu tiefe Gründungen (bis etwa 10 m) handelt. Der Aufwand beim Vakuumverfahren vergrößert sich mit wachsender Gründungstiefe, da die Kosten für das Abböscheln dann stark zunehmen. Bei einer bestimmten Gründungstiefe sind die Kosten für Gefrier- und Vakuumverfahren im Gleichgewicht. Allerdings sei hier noch erwähnt, daß das Vakuumverfahren nur bei Böden bestimmter Durchlässigkeit ($k = 1 \cdot 10^{-3}$ bis $1 \cdot 10^{-5}$ cm/sec) anwendbar ist, im Gegensatz zum Gefrierverfahren, das hiervon unabhängig ist.

II. Grundzüge der technischen Durchführung des Verfahrens.

Im folgenden sollen technische Einzelheiten am Beispiel eines Gefrierschachtes beschrieben werden.

In diesem Fall werden die Bohrungen für die Gefrierrohre auf einem Kreis um den Schachtmittelpunkt bei einem gleichmäßigen Abstand von etwa 1 bis 2 m lotrecht angeordnet. Dieser sog. Gefrierrohrkreis hat einen Durchmesser, der um einige Meter größer als der Aushubdurchmesser ist. Die Bohrungen sind sehr sorgfältig auszuführen, da große Bohrlochabweichungen ein Schließen des Frost-

¹ STÄNDER, W.: Vorträge der Baugrundtagung 1962, Essen 1962, S. 187.

körpers verzögern oder ganz in Frage stellen können. Sie müssen in der Regel bis in eine wasserundurchlässige Schicht geführt werden, so daß der Frostkörper in diese Schicht eingebunden werden kann und ein Wasserzufluß an der Sohle (Gefahr des hydraulischen Grundbruchs) vermieden wird. Man erreicht dadurch außerdem, daß der Frostkörper nicht unter Auftrieb steht. In die Bohrlöcher werden die unten geschlossenen Gefrierrohre eingebracht. Diese nahtlosen Rohre haben nach DIN 4930 folgende Abmessungen: Außendurchmesser: 139 mm; Wandstärke: 7,5 mm. In die Gefrierrohre werden Fallrohre eingehängt, die unten offen sind.

Im Teil B, III, 1 sind Formeln zur Berechnung der günstigsten Abmessungen des Fallrohrs auf Grund von strömungstechnischen und thermischen Überlegungen angegeben.

Die Gefrierrohrabmessungen sollten aber besser über eine Wirtschaftlichkeitsberechnung unter Berücksichtigung der Energie- und Anlagekosten in Abhängigkeit von folgenden Einflußgrößen: Energiepreis, Teufdauer und Wiederverwendbarkeit der Fallrohre, bestimmt werden. Welche Rechenschritte hierfür erforderlich sind, wird ausführlich an Beispielen in der Literatur angegeben¹.

Nach dem Einbau der Gefrierrohre werden die Bohrabweichungen in einem Zeitplan festgehalten. Abb. 132 zeigt als Beispiel den Verlauf der Bohrungen für den Gefrierschacht Auguste Victoria 7.

Außerdem müssen die Rohrverbindungen noch vor dem Beschicken mit Kühlsole einer Druckprobe unterzogen werden, da ein Ausfließen der Flüssigkeit während des Gefrierprozesses eine Gefrierpunktserniedrigung des Grundwassers bewirken würde. Dadurch könnte der Frostkörper die erforderliche Festigkeit bzw. Wasserdichtigkeit verlieren.

Als Gefrieranlagen dienen üblicherweise Kompressionskältemaschinen, wobei als Kältemittel vielfach Ammoniak und als Kälteträger Chloridsolen verwendet werden. In anderen Ländern, insbesondere in den USA, bevorzugt man als Kältemittel Frigen. Bei einstufiger Verdichtung erreicht man eine Abkühlung des Kälteträgers bis etwa -25°C .

Dieser Wert kann aber nur erreicht werden, wenn Kühlwasser mit entsprechend niedriger Temperatur zur Verfügung steht. Im Kalibergbau bzw. bei salzhaltigem Grundwasser muß man wegen der Gefrierpunktserniedrigung mit einer tieferen Temperatur arbeiten, um das Grundwasser zum Gefrieren zu bringen. In diesem Fall werden zweistufige Kälteanlagen benötigt, um eine Temperatur von -40°C und darunter zu erreichen.

Über die Frostausbreitung und die Berechnung der Schließzeit der Frostkörper wird im nächsten Kapitel ausführlich berichtet.

Bemerkt sei an dieser Stelle noch, daß neben den Gefrierlochbohrungen auch Kontrollbohrlöcher für Messungen innerhalb und außerhalb des Gefrierrohrkreises vorzusehen sind. Durch Temperaturmessungen in diesen Bohrlöchern kann die Bildung des Frostkörpers überwacht werden. Das Schließen des Frostkörpers läßt sich eindeutig durch das Ansteigen des Grundwasserspiegels in den innenliegenden Kontrollbohrlöchern feststellen. Das Ansteigen des Wasserspiegels ist dadurch

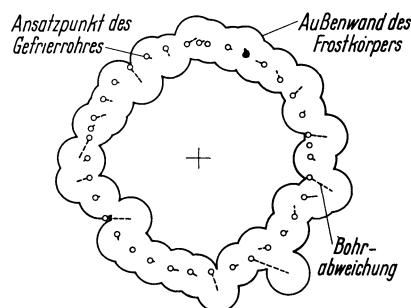


Abb. 132. Verlauf der Bohrungen eines Gefrierschachtes.

¹ STÄNDER, W.: Glückauf 1964, Heft 9, S. 507–510.

bedingt, daß einerseits durch die Volumvergrößerung des Wassers beim Gefrieren eine Wasserverdrängung bewirkt wird und andererseits nach dem Schließen das Wasser des ungefrorenen Kerns nicht mehr nach außen entweichen kann.

Zu diesem Zeitpunkt kann mit den Abteufarbeiten unterhalb des Grundwasserspiegels begonnen werden¹. Da nun mit zunehmender Teufe die Belastung des Frostkörpers in Form von Wasser- und Erddruck ansteigt, muß das weitere Wachstum des Frostkörpers mit Hilfe der Temperatur der Kühlsole so gesteuert werden, daß beim Durchteufen die Frostwand jeweils die erforderliche Minstdicke erreicht hat, d. h. der Gefrierprozeß und die Abteufarbeiten müssen zeitlich aufeinander abgestimmt werden, wobei schon an dieser Stelle darauf hinwiesen sei, daß die Festigkeit des gefrorenen Gebirges u. a. von der Temperatur abhängt. Näheres über die erforderliche Frostwanddicke ist aus dem Teil C zu entnehmen.

Gleichlaufend mit dem Abteufen werden meist die Ausbauarbeiten begonnen. Vielfach wird satzweise an die Frostwand anbetoniert, wobei ein Satz, welcher der freien Standhöhe der Frostwand entspricht, meist 25 bis 35 m hoch ist.

Zweck des Außenbetonmantels ist der Schutz des gefrorenen Gebirgsstoßes während der Abteufarbeiten.

Die Art des Schachtausbau richtet sich im wesentlichen nach den Gebirgsverhältnissen. Man unterscheidet zwischen lockerem und standfestem Gebirge. Die ersten Gefrierschächte wurden zunächst mit Holz oder Mauerwerk ausgebaut, doch verlor diese Bauweise rasch an Bedeutung als die gußeisernen Tübbinge aufkamen, die bei vielen Schächten in lockerem Gebirge verwendet wurden. In dem Bestreben, auch in unmittelbarer Nähe des Schachtes Abbau betreiben zu können, wurde in jüngerer Zeit der gleitende Schachtausbau entwickelt. Zwischen den Außenbetonmantel und die tragende Schachtsäule wird eine druckverteilende Flüssigkeit (z. B. Bitumen, Wasser) eingebracht. In diesem Fall verzichtet man auf den starren gußeisernen Tübbing und wählt eine einfache oder doppelte Stahlsäule mit Zwischenbeton. Im übrigen wird hier von einer genauen Beschreibung und Berechnung der verschiedenen Ausbauarten abgesehen; es sei in diesem Zusammenhang auf die Fachliteratur verwiesen².

Wenn das Abteufziel erreicht ist, kann nach der Fertigstellung der Ausbauarbeiten die Kälteanlage stillgesetzt werden. Das Auftauen des Frostkörpers erfolgt entweder auf natürliche Weise von der Außen- und Innenfläche her, oder, wenn man den Auftauprozeß beschleunigen will, durch Zirkulation erwärmer Sole auch von den Gefrierrohren aus. Mit fortschreitendem Auftauen muß der Schachtausbau den Gebirgs- und Wasserdruk aufnehmen. Während dieser Zeit treten manchmal Undichtigkeiten der Schachtsäule auf, die meist aber, entweder durch Verstemmen der Tübbingfugen mit Blei bzw. Nachziehen der Schrauben oder durch Zementieren des Hinterfüllbetons, beseitigt werden können. Schließlich gewinnt man durch Ziehen die Fallrohre wieder, während man die Gefrierrohre, obwohl sie einen erheblichen Wert darstellen, insbesondere bei lockeren Schichten oft im Gebirge beläßt, da ein Nachsinken des Gebirges u. U. eine Änderung der Gebirgsspannungen herbeiführen kann. Die dadurch entstehenden einseitig wirkenden Zusatzbelastungen können den Schachtausbau gefährden.

¹ STÄNDER, W.: Die Frostausbreitungsvorgänge bei Gefriergründungen insbesondere im Hinblick auf den Schachtbau. Veröffentl. d. Instituts für Bodenmechanik und Grundbau der TH Karlsruhe, Heft 3, 1960.

² LINK, H.: Entwicklung und gegenwärtiger Stand der Schachtausbau berechnung für lockeres, wasserführendes Gebirge. Vortrag auf d. 2. Internat. Arbeitstagung über Spezialprobleme der Schachtauthenik, Sept. 1965 in Freiberg/Sa. (Kammer der Technik).

III. Anwendungsbeispiele.

Bereits im Jahr 1883 hatte POETSCH die Möglichkeit, seine Erfindung zu erproben. Der geplante Schacht IX der Grube Archibald in der Provinz Sachsen mußte wegen Wasserschwierigkeiten in 34 m Teufe aufgegeben werden. Es galt eine Schwimmsandschicht von 4 bis 5 m zu durchfahren, um damit die darunterliegenden Kohlevorkommen zugänglich zu machen. POETSCH wählte für den rechteckigen Querschnitt 10 Gefrierrohre hart am Stoß und weitere 13 für die Schachtscheibe. Auf Grund dieser ungünstig angelegten Gefrierrohranordnung war es nur möglich, nachdem das Gebirge innerhalb von 23 Tagen auf -19°C abgekühlt worden war, 83 Tage nach Gefrierbeginn über einen kleinen Vorschacht das Kohleflöz zu erreichen. Der Schacht wurde aber wieder aufgegeben, nachdem man die Gefrierrohre gezogen hatte und eine Vergrößerung des Querschnitts mit Hilfe einer Entwässerung mißlang. Trotzdem war damit der Beweis für die erfolg-

Tabelle 1.

Baujahr	Schachtbezeichnung und Standort	Schachtform	Größe (m)	Gefriertiefe	Bemerkung
1883	Grube Archibald	rechteckig	4,7 × 3,1	5 m	1. Gefrierschacht
1884	Grube Centrum	rechteckig	4 × 2,5	33 m	
1884	Maxgrube	rechteckig	7 × 7	5 m	
1884	Gefrierschacht I der Grube Emilie	rund	Ø 3,2	31,7 m	
1885	Gefrierschacht II der Grube Emilie	ellipsen-förmig	Haupt-achsen 3,10/4,30	35 m	
1885	Houssu VIII (Belgien)	rund	Ø 4,5	22 m	1. Gefrierschacht in Belgien
1886	Jessenitz	rund	Ø 5	75 m	1. Gefrierschacht im Kalibergbau
1888	Schacht der Chapin Mining Company (USA)	rechteckig	4,5 × 5,0	30 m	1. Gefrierschacht in USA
1901	Harchies (Belgien)			235 m	
Bis 1905 wurden insgesamt 87 Gefrierschächte fertiggestellt oder begonnen (40 davon in Frankreich)					
1906	Kalischacht Niedersachsen			120 m	Wasserabschluß in einer 20 m tiefen Steinsalzschicht 1. Anwendung sehr tiefer Temperaturen ($-41,5^{\circ}\text{C}$)
1907	Lohberg I und II			415 m	
1911	Zolderschächte I/II Campine (Belgien)			620 m	
1914	Bis zum 1. Weltkrieg wurden insgesamt 155 Gefrierschächte hergestellt.				
Von den sechs großen deutschen Schachtbauunternehmen wurden in den Jahren 1912/1957 552 Schächte neu abgeteuft, davon 158, d. h. rund 28% mit Hilfe des Gefrierverfahrens.					
1958	Schacht der Potash Company of America, Saskatoon (Kanada)			915 m	

reiche Anwendung des Verfahrens von POETSCH erbracht. In rascher Folge wurde dann eine Vielzahl von Schächten mit Hilfe des Gefrierverfahrens abgeteuft, wobei allerdings ein Teil davon nach Fertigstellung wieder aufgegeben wurde. Man wagte nicht, vom Schacht aus das Gebirge anzufahren, da starke Wasserzuflüsse des anstehenden gespannten Grundwassers zu befürchten waren.

Die Tab. 1 enthält eine Zusammenstellung der besonders interessanten Gefrierschächte. Sie zeigt die rasche zeitliche Entwicklung und Verbreitung des Gefrierverfahrens in verschiedenen Ländern. Außerdem sei besonders auf das stetige Anwachsen der Gefriertiefe hingewiesen.

Schon frühzeitig wurde die Gefriermethode auch im Grund- und Stollenbau angewendet. Auf diesen Gebieten hat sich allerdings das Gefrierverfahren im Vergleich mit anderen Bauweisen hauptsächlich aus wirtschaftlichen Gründen nicht durchgesetzt, sondern blieb auf einzelne, technisch kaum anders lösbare Probleme beschränkt. Ein weiterer Grund hierfür ist allerdings auch die Unkenntnis über das Festigkeitsverhalten gefrorener Erdstoffe. So war z. B. das Problem der Biegefestigkeit dieser Stoffe bisher nicht so akut, weil man im Schachtbau runde Frostkörperperformen hat, bei denen in der Regel nur Druckspannungen auftreten. Im Grundbau wird meist die eckige Gründungsform bevorzugt.

Die folgenden charakteristischen Beispiele sollen zeigen, daß die Gefriermethode auch im *Grundbau* bereits für Baugrubenumschließungen und die zeitweilige Stabilisierung von Böschungen erfolgreich angewendet wurde.

Haus Hertzog, Berlin (1905) (Abb. 133)¹. Hier sollte ein Maschinenkeller in 11,7 m Tiefe gegründet werden, wobei der Grundwasserspiegel sich bei 4,8 m unter der Geländeoberfläche befand. Die Baugrube war 15 m breit und 27,4 m lang. Wegen des Auftriebes war eine starke Betonsohlenplatte von 3 m Stärke vorgesehen, so daß um dieses Maß tiefer zu gründen war. Zunächst hatte man versucht, mit einer Pfahlspundwand die Baugrube zu umschließen. Wegen der Abweichung der Pfähle entstanden Lücken in der Wand, so daß beim Ausheben der Sand in die Baugrube zu fließen begann. Da dadurch die benachbarten Häuser gefährdet waren, griff man nach langem Zögern zum Gefrierverfahren und umschloß mit 120 Gefrierothren bei 17 m Tiefe die Baugrube. Nachdem die Frostwand von 1,5 bis 2 m Dicke fertiggestellt war, konnte man mühelos den Boden unter Wasser ausbagern. Es ergaben sich zwar noch

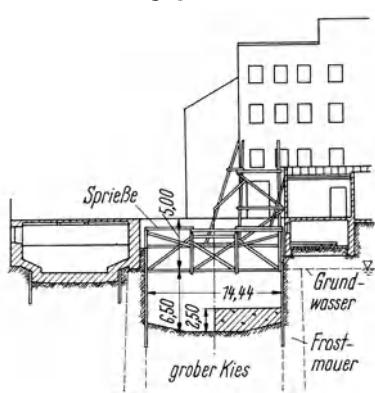


Abb. 133. Haus Hertzog: Querschnitt der Baugrube.

Schwierigkeiten durch Unterspülung bzw. unterläufiges Auswaschen der Frostwand, die jedoch durch nachträgliches Dichten von Tauchern behoben werden konnten. Bei einer Vergrößerung der Gefriertiefe um nur wenige Meter wären diese Schwierigkeiten nicht aufgetreten.

Hochhaus in Moskau (1952)². Im Stadtzentrum von Moskau wurde das Gefrierverfahren zum Abteufen einer tiefen Baugrube im Schwimmsand angewendet. Die Gefriewände wurden als provisorische Tragkonstruktion benutzt, so daß sich eine Zimmerung erübrigte. Es wurden insgesamt 230 Gefrierbohrlöcher niedergebracht. Die mittlere Temperatur der Frostwand betrug -15 bis -17 °C.

¹ Dtsche Bauzg. (1908) S. 36.

² DORMAN, J.: Cholodilnaja Technika Bd. 29 (1952) S. 5.

Durch das Fehlen der Zimmerung wurde die Verwendung von Baumaschinen für die umfangreichen Arbeiten innerhalb der Baugrube ermöglicht. In der UdSSR erobert sich diese Baumethode ein immer breiter werdendes Arbeitsgebiet. Anscheinend ist man dort in der statischen Berechnung von Frostwänden schon viel weiter als bei uns in Deutschland.

Grand-Coulee-Damm, Amerika (1936) (Abb. 134)¹. Im Zusammenhang mit einem der größten Energie- und Wasserversorgungsprojekte der USA wurde für eine Talsperre das Gefrierverfahren beim Bau des Grand-Coulee-Damms angewendet. Beim Aushub der Baugrube für den östlichen Kämpfer der Bogenmauer stellte sich heraus, daß die Gründungsohle von einer tiefen Erosionsrinne durchquert wurde. Mit fortschreitendem Aushub begann das bergseitig anstehende Material (glazialer Schluff mit etwa 25% tonigen Beimengungen) durch die Erosionsrinne in die Baugrube zu rutschen. Nachdem auch ein mehrmaliges Abbösen die Rutschungsgefahr nicht beseitigt hatte und eine vorgesetzte Betonmauer mit Steinschüttung und Holzverbau ein weiteres Rutschen nicht aufhalten konnte, entschloß man sich, die Rinne durch eine gewölbte Frostmauer zu verschließen, in deren Schutz der Aushub fortgeführt werden konnte. Anscheinend spielte hier die Wirtschaftlichkeit keine Rolle, denn man wählte sehr enge Rohrabstände (75 cm) und überdimensionierte die Frostmauer sehr stark. Bemerkenswert ist, daß man hier wegen der geringen Gefriertiefe von etwa 15 m die Gefrierrohre nicht gebohrt, sondern gerammt hat. Dadurch konnte man ein Rohr innerhalb einer Stunde niedrigen. Das Gefrierverfahren bewährte sich zur vollen Zufriedenheit.

Die Zahl der aufgeführten Beispiele ließe sich noch vergrößern. Zum Beispiel hat man das Verfahren schon zur Dichtung eines Loches in einem Fangedamm verwendet, sowie zur Erhaltung von Ausgrabungen in der Archäologie und zur Entnahme von Bodenproben in größerem Stil. Für die Schiffsshebewerke Rothensee, Hohenwarthe und Henrichenburg baute man die Schwimmerschächte mit Hilfe des Gefrierverfahrens.

Im *Tunnel- und Stollenbau* verwendet man das Verfahren einerseits für die Zugangsschächte und andererseits für den eigentlichen Tunnel mit vertikal oder auch horizontal eingebrachten Gefrierrohren. Als markante Beispiele seien hier angeführt:

Scheldetunnel, Antwerpen (1932)². Beim Bau eines Straßentunnels unter der Schelde wurde zu beiden Seiten des Flußufers je ein Lüftungsschacht mit 20,5 m Ausbruchdurchmesser bis in 28 m unter Gelände abgeteuft. Hierbei wurden insgesamt 116 Gefrierrohre auf 2 Rohrkreisen angeordnet, wobei der äußere einen Durchmesser von 26 m und der innere einen von 23,8 m hatte. Der Rohrabstand

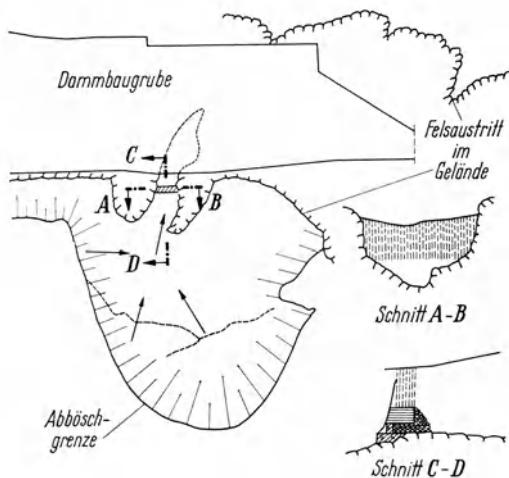


Abb. 134. Grand-Coulee-Damm.

¹ GORDON, G.: Eng. News-Rec. Vol. 118 (1937) S. 211.

² Bautechn.-Arch. Heft 9, Berlin 1953.

betrug innen 1,30 m und außen 1,40 m. Bei einem Fußgängertunnel unter der Schelde, der fast gleichzeitig mit dem obigen Straßentunnel gebaut wurde, hat man die Gründung der Zugangsschächte und Rolltreppenstollen ebenfalls im Schutze von gefrorenem Erdreich ausgeführt.

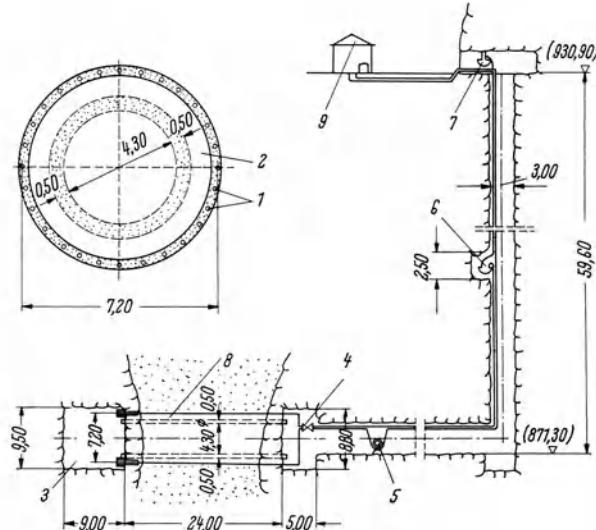


Abb. 135. Längsschnitt und Querschnitt durch den Stollen.

1 Gefrierrohre; 2 Stollenquerschnitt; 3 Kammer; 4 Soleverteiler; 5 Soleumlaufpumpe; 6, 7 Überlaufgefäß; 8 Frostwand; 9 Kältemaschine.

U-Bahn-Tunnel, Moskau (1936)¹. Beim Bau der Untergrundbahn in Moskau teufte man 20 Schächte zwischen 15 und 40 m nach dem Gefrierverfahren ab, nachdem man zuvor mit Spunden und dem Druckluftverfahren schlechte Erfahrungen gemacht hatte. Man teufte hier deshalb soviele Schächte ab, um möglichst viele Angriffspunkte für die Herstellung des Tiefstunnels zu haben. Wenngleich diese Bauweise nichts Neues darstellt, so ist es doch notwendig, wegen ähnlicher bevorstehender Projekte in Deutschland darauf hinzuweisen. Das technisch Bemerkenswerte an jenem Projekt sind die Zu- und Abgangsschächte, die in sog. schräger Schachtbauweise hergestellt wurden. Die schrägliegenden Gefrierrohre wurden mit Hilfe besonderer Stoßmaschinen nach dem System Turka-Armstrong bzw. mittels Drehbohrmaschinen nach dem System Krelius niedergebracht.

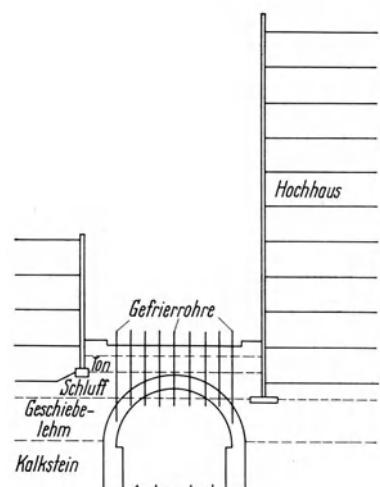


Abb. 136. Eisenbahntunnel unter einer Straße.

Herstellung eines Druckstollens unter einem Fließbett (Abb. 135)². Beim Bau eines Druckstollens in 60 m Tiefe für ein Kraftwerk mußte eine wasserführende, allu-

¹ GOERTZ: Die Bautechn. Bd. 12 (1934) S. 423.

² SCHMIDT, TH. E.: Kältetechn. Bd. 5 (1953) S. 20.

viale Schicht von etwa 20 m durchörtert werden, die zwischen Kalkfelsen eingebettet lag. Dies war nur mittels des Gefrierverfahrens möglich. Der Stollen sollte einen Ausbruchdurchmesser von 5,3 m haben. Man wählte einen horizontalen Gefrierrohrkreisdurchmesser von 7,2 m bei einem Rohrabstand von 80 cm. Zur Verlegung der Gefrierrohre wurden zunächst die Rohre von einer besonderen, im Felsen liegenden Kammer aus mittels Preßluft vorgetriebenen, und zwar bis in eine zweite Kammer auf der gegenüberliegenden Felsenseite. Die 4-Zoll-Rohre sollten die eigentlichen 3-Zoll-Rohre beim Einbau schützen. Sie wurden nach der Verlegung der 3-Zoll-Rohre wieder entfernt.

Eisenbahntunnel in Montreal, Kanada (1960) (Abb. 136)¹. In Montreal war zwischen zwei Hochhäusern unter einer Straße ein Tunnel zu bauen. Um die Häuser vor Setzungsschäden und Rutschungen zu schützen, entschloß man sich für das Gefrierverfahren. Man bohrte von der Straße aus Gefrierothöcher bis in 7 bis 9 m Tiefe und fror die ganze Straße zwischen den Häusern ein. Der gefrorene Erdkörper diente als provisorische Tragkonstruktion, unter deren Schutz der Tunnel gebaut werden konnte. Zu den Häusern hin wurde tiefer als in der Mitte gefroren, und zwar bis zur ersten standfesten, tragenden Schicht des Untergrundes.

IV. Schwierigkeiten und Mißerfolge beim Abteufen von Schächten.

Die anfänglichen Mißerfolge beim Gefrierverfahren (das Abteufen an sich gelang, die Schächte konnten aber dem Verwendungszweck nicht dienen) waren darauf zurückzuführen, daß bei Erreichen der Gefrierendeufe Wasser einbrach, das nicht oder nur mit größter Mühe weggepumpt werden konnte. Der Grund lag darin, daß die Gefrierrohre nicht genügend tief in die dichtende Schicht eingebunden wurden.

Die Schwierigkeiten, mit denen man bei den ersten Gefrierschächten zu kämpfen hatte, hemmten die Verbreitung des Gefrierverfahrens in Deutschland, obwohl sie mit dem Verfahren an sich nichts zu tun hatten. Im Gegensatz dazu stand die Entwicklung in Frankreich, wo das Gefrierverfahren begeistert aufgegriffen wurde und sich infolge der guten geologischen Bedingungen schnell verbreitete.

Mit Wassereinbrüchen hatte man beim Gefrierverfahren oft zu kämpfen, wird es doch hauptsächlich bei schwierigen Wasserverhältnissen angewendet. Ein Hauptgrund für Wassereinbruch lag im Leckwerden der Kühlrohre. Die Frostwände wurden geschwächt und das Wasser brach infolge seines hohen Druckes an einzelnen Stellen ein. In einigen Fällen führte dies lediglich zum Ersauen des Schachtes, bei anderen wurden derartige Sandmengen mitgerissen, daß der Schacht praktisch wertlos wurde.

Es ist nun nicht so, daß jedes Leck zur Katastrophe führt. Bei kleinen Lecks, von denen aus sich die Sole nur durch Diffusion ausbreiten kann, geschieht die Lösung des Eises so langsam, daß sie praktisch belanglos ist. Sind jedoch die Lecks größer, so daß durch Konvektion ständig konzentrierte Sole an den Frostkörper herangeführt wird, so geht die Zerstörung rascher vor sich, wobei durch das Mitreißen von Erdstoffteilchen Hohlräume geschaffen werden, die das Vordringen der konzentrierten Sole begünstigen.

Daß die Art der Kühlflüssigkeit, vom wirtschaftlichen und thermischen Standpunkt abgesehen, nicht beliebig ist, zeigte sich jüngst beim tiefsten Gefrierschacht der Welt (bei Saskatoon/Kanada). Ein Gefrierrohr befand sich durch Verlaufen der Bohrung zu nahe an der Schachtinnenwand und wurde im Verlauf der Abteufarbeiten angeschlagen, die Kühlflüssigkeit rann in den Schacht. Während üblicher-

¹ Proc. Am: Soc. Civ. Eng. (J. Constr. Div.) Vol. 86 (1960) Nr. C03.

weise unbrennbare Flüssigkeiten verwendet werden, benutzte man hier Petroleum. Die Folge war eine Explosion auf der Schachtsohle.

Ähnlich wie Kühlsole wirkt sich fließendes Wasser aus. Ist die Grundwasserströmung bekannt, so läßt sich durch gutes Dimensionieren die Frostwand dichten. Es können jedoch unterirdische Strömungen oder Quellen vorhanden sein, die sich nicht, oder nur sehr schwer, von Tage aus feststellen lassen. Plötzliche Wassereinbrüche können dann die Folge sein.

Da die meisten Schachtausbau mit Beton hinterfüllt werden, Beton jedoch bei zu tiefen Temperaturen schwer oder gar nicht abbindet, ist hierauf zu achten. Bei Schacht Borth II war der Ausbau infolge Nichtabbindens des Betons so undicht, daß große Wassermengen eindrangen. Der Schacht mußte für das Einbringen eines zweiten dichten Ausbaus nochmals gefroren werden.

Bei frostschiebenden Böden ist zu befürchten, daß beim Weiterfrieren große Drücke auf die Schachtwand wirken. Man hat dies kaum beachtet; es ist aber anzunehmen, daß Frostschiebungen, falls nicht der Ausbau an sich zu schwach war, der eigentliche Grund für Beschädigungen und Zerstörungen vieler Gefrieschächte gewesen sein mag (s. a. Abschn. B I/6b).

B. Die rechnerische und verfahrenstechnische Behandlung des Gefrierverfahrens.

I. Die Berechnung der Frostausbreitung.

1. Allgemeiner Gedankengang der Berechnung¹.

Während der Entstehung des Frostkörpers sind zwei Zeitabschnitte zu unterscheiden. Zunächst bildet sich um jedes einzelne Gefrierrohr ein Frostmantel, der schließlich die Frostmäntel der Nachbarrohre berührt und mit ihnen zusammenwächst. Dieses Zusammenwachsen wird als Schließen bezeichnet, weil von hier ab ein zusammenhängender, geschlossener Frostkörper vorhanden ist. Die Zeit, die vom Gefrierbeginn bis zum Schließen verstreicht, ist die Schließzeit.

Im ersten Gefrierabschnitt bis zum Schließen ist der Frostfortschritt an einem einzelnen Rohr zu betrachten. Dabei wird vom Einfluß der benachbarten Gefrierrohre zunächst abgesehen, d. h. der Gefriervorgang wird so behandelt, als befände sich ein einzelnes Gefrierrohr in unbegrenzter Umgebung, die von einem homogenen, isotropen Stoff erfüllt sei. Unter sonst gleichen Bedingungen (Stoffeigenschaften und Temperaturen) breitet sich der Frost an einem einzelnen Rohr langsamer aus als an einem Rohr innerhalb eines Rohrverbands, also einer Gruppe von Gefrierrohren, die alle am Wärmeentzug beteiligt sind.

Nachdem eine Lösung für das Gefrieren mit einem einzelnen Rohr gefunden ist, kann das beschleunigte Frostwachstum im Rohrverband dadurch berücksichtigt werden, daß die Eingangswerte der Lösungsgleichung in geeigneter Weise verändert werden. Damit gestattet die Lösung für die Frostausbreitung an einem einzelnen Gefrierrohr die Bestimmung der Schließzeit für beliebige Rohranordnungen.

Die Berechnung des Frostfortschritts nach dem Schließen ist für jede Rohranordnung getrennt durchzuführen. Hier werden die beiden wichtigen Fälle, nämlich Anordnung der Rohre längs einer geraden Reihe und auf einem Kreis, wobei der entstehende Frostkörper eine ebene Wand bzw. einen Hohlzylinder bildet, behandelt.

¹ STÄNDER, W.: Die Verbesserung der Gefriertechnik auf wissenschaftlicher Grundlage. VDI-Z. Bd. 108 (1966) Nr. 4, S. 117–121 u. Nr. 5, S. 171–175.

Für das Gefrieren vor einer ebenen, unbegrenzten Kühlwand existiert eine exakte analytische Lösung, die für die Berechnung der Frostausbreitung an einer geraden Rohrreihe herangezogen wird. Dabei besteht die Hauptschwierigkeit darin, die sowohl zeitlich als auch örtlich veränderlichen Temperaturen an einer Rohrreihe durch eine Beziehung auszudrücken, welche die Anwendung dieser Lösung ermöglicht.

Die Lösung für die ebene Frostausbreitung kann mit Vorteil auch zur Verbesserung der Näherungsbeziehungen für den Gefrierohrkreis benutzt werden.

Wichtigste Anordnungsform von Gefrierohten ist neben der geraden Reihe der Kreis, bei dem die Rohrachsen auf der Mantelfläche eines Zylinders, in seltenen Fällen auch auf einem Kegelmantel liegen. Hierbei ist die Zahl der den Frostfortschritt beeinflussenden Faktoren so groß, daß eine analytische Lösung zunächst nur durch grobe Vereinfachungen zu erreichen ist. Außerdem müssen das Innere des Rohrkreises und die äußere Umgebung getrennt untersucht werden. In erster Näherung wird jeweils das Fortschreiten des Frostes unter Vernachlässigung der Abkühlungswärme des gefrorenen und ungefrorenen Gebiets ermittelt. Dadurch ergibt sich allerdings eine zu hohe Frostausbreitungsgeschwindigkeit, wobei die Abweichung von der Wirklichkeit um so größer wird, je höher die Temperatur der Umgebung bei Gefrierbeginn liegt. Die Berechnung bedarf also einer Korrektur, die aus einem Vergleich mit der Lösung des ebenen Problems gewonnen wird. Hier läßt sich nämlich der Einfluß der Abkühlungswärmen auf den Frostfortschritt leicht angeben. Allerdings ist zu berücksichtigen, daß beim Rohrkreis die Abkühlungswärmen des Ungefrorenen einerseits aus einem begrenzten Innenraum mit endlichem Wärmeinhalt (Enthalpie) und andererseits aus einer unbegrenzten, äußeren Umgebung stammen. Dieser Umstand wird durch eine zweite Korrektur berücksichtigt, wonach die endgültigen Näherungsbeziehungen für die Frostausbreitung in den Innen- und Außenraum des Gefrierohrkreises gefunden werden.

Die für das Gefrieren an einer geraden Rohrreihe und am Rohrkreis angegebenen Berechnungsverfahren erlauben die Bestimmung des Frostfortschritts für alle gebräuchlichen Rohranordnungen. Diese lassen sich nämlich immer auf die beiden beschriebenen Grundtypen zurückführen und sind in schwierigen Fällen Kombinationen aus beiden, wie z. B. rechteckige Baugrubenumschließungen, die einerseits aus geraden Rohrreihen zusammengesetzt sind, andererseits aber wie ein Rohrkreis einen begrenzten Innenraum und eine unendliche Umgebung aufweisen. Bei Anordnung der Gefrierohten auf einem Kegelmantel sind mehrere zur Kegelachse normale Schnitte zu betrachten, die wie Zylinderquerschnitte behandelt werden. Selbstverständlich sind bei solchen Rohranordnungen größere Fehler in Kauf zu nehmen, als bei der geraden Rohrreihe oder dem Rohrkreis. Um so wichtiger wird angesichts dieser Tatsache, daß die Berechnungsverfahren für die beiden einfachen Fälle sehr genaue Ergebnisse liefern.

Die Anwendung des Gefrierverfahrens in strömendem Grundwasser kommt seltener vor, weil die ständige Zufuhr beträchtlicher Wärmemengen durch die Strömung die Wirtschaftlichkeit des Verfahrens herabsetzt. Die Ermittlung des Frostfortschritts ist wesentlich schwieriger als in ruhendem Grundwasser, weil ein Teil der Symmetrie verlorengeht. Außerdem überlagert sich dem Wärmeleitungsvorgang eine Wärmestromung, die nur mit Hilfe von Vereinfachungen mathematisch erfaßt werden kann. Schließlich ändert sich die Wärmeleitfähigkeit des ungefrorenen Bodens quer zur Strömungsrichtung in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit, was einer Anisotropie des Bodens gleichkommt. Deshalb ist man bis heute noch darauf angewiesen, die Berechnung des Frostfortschritts auf ruhendes Grundwasser zu beziehen und die Ergebnisse mit Hilfe empirischer Korrekturfaktoren den wirklichen Verhältnissen anzunähern.

2. Frostfortschritt um ein einzelnes Gefrierrohr in unbegrenzter Umgebung.

a) Aufgabenstellung. Die Fouriersche Differentialgleichung, die allgemein zur Beschreibung von Wärmeleitungsvorgängen dient, muß für das gefrorene und das ungefrorene Gebiet getrennt integriert werden, da in den beiden Gebieten verschiedene Stoffeigenschaften vorliegen. Die Trennfläche zwischen dem Gefrorenen und dem Ungefrorenen wird als Frostgrenze bezeichnet. Ihr ist die Temperatur null zugeordnet, d. h. alle vorkommenden Temperaturen t sind als Temperaturdifferenzen, bezogen auf den Gefrierpunkt des Grundwassers zu verstehen. In den meisten Fällen stimmt die so definierte Temperaturskala mit der Celsiusskala überein. Zur Unterscheidung werden die Größen des gefrorenen Gebiets mit dem Index 1, die des Ungefrorenen mit dem Index 2 versehen. Die Zeit wird mit dem Symbol τ , die Temperaturleitzahl mit $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ bezeichnet, worin λ die Wärmeleitzahl, c die spezifische Wärme und ρ die Dichte bedeuten.

Für das Gefrieren an einem einzelnen, unendlich langen Rohr in unbegrenzter Umgebung gilt die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung für den gefrorenen Teil $r_0 \leq r \leq R$ in der Form

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Darin bedeutet die Ortskoordinate r den Abstand von der Gefrierrohrachse. Bei $r = r_0$ liegt die Außenwand des Gefrierrohrs, bei $r = R$ die Frostgrenze.

Für das Ungefrorene $R \leq r < \infty$ gilt analog Gl. (1):

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \left(\frac{\partial^2 t_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Gl. (1) und Gl. (2) werden verknüpft durch folgende Wärmebilanz an der Frostgrenze:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial r} \right)_{R-} = \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial r} \right)_{R+} + \varrho q_s \frac{dR}{d\tau}. \quad (3)$$

Hierin bedeuten $(\partial t_2 / \partial r)_{R+}$ die Temperatursteigung des Ungefrorenen unmittelbar an der Frostgrenze, $(\partial t_1 / \partial r)_{R-}$ die Temperatursteigung der gefrorenen Zone an derselben Stelle, ϱq_s die volumbezogene Erstarrungswärme des Erdreichs und λ_1 bzw. λ_2 die Wärmeleitzahlen. Physikalisch bedeutet Gl. (3), daß sich an der Frostgrenze zu der von außen nach innen fließenden Abkühlungswärme des ungefrorenen Gebiets noch die Kristallisationswärme addiert, die dem Vorrücken der Frostgrenze entspricht; die Summe der beiden Wärmen wird von der Frostgrenze aus nach innen abgeführt. Hier hat also die Temperaturkurve für das Gesamtgebiet einen Knick.

Außer Gln. (1) bis (3) sind noch einige Anfangs- und Randbedingungen zu erfüllen. Zur Zeit $\tau = 0$ gilt die Anfangsbedingung

$$t_2 = t_{II} > 0 \quad (4)$$

im Bereich $r > r_0$. Die Umgebung des Gefrierrohrs ist also vor Gefrierbeginn auf einer einheitlichen Temperatur, der Bodenanfangstemperatur t_{II} .

Nach Gefrierbeginn, d. h. für $\tau > 0$, gelten die Randbedingungen

$$t_1 = t_I = \text{konst} \quad (5)$$

oder

$$t_1 = t_I = f(\tau) \quad (6)$$

für die Rohrwand $r = r_0$, sowie

$$t_2 = t_{II} = \text{konst} \quad (7)$$

für $r \rightarrow \infty$.

Darüber hinaus ist die bereits erwähnte Bedingung

$$t_1 = t_2 = 0 \quad (8)$$

für die Frostgrenze $r = R$ zu beachten.

b) Analytische Näherungslösung¹. Das durch die Gln. (1) bis (8) beschriebene Problem ist mathematisch nicht exakt lösbar. Man gelangt jedoch zu einer sehr guten Näherungslösung, wenn man zunächst eine etwas andere Aufgabe, die Frostausbreitung um ein Rohr mit dem Radius $r = 0$, das einen zeitlich konstanten Wärmefluß \dot{Q} aufnimmt, betrachtet. Für diesen Gefriervorgang an einer fadenförmigen Wärmesenke existiert eine analytische Lösung von der Form

$$R = 2 k \sqrt{a_1 \tau}, \quad (9)$$

worin der Faktor k folgender Gleichung genügt²:

$$\frac{\dot{Q}}{4 \pi} \exp(-k^2) + \frac{\lambda_2 t_{II}}{Ei\left(-\frac{a_1}{a_2} k^2\right)} \exp\left(-\frac{a_1}{a_2} k^2\right) = k^2 a_1 \varrho q_s. \quad (10)$$

Aus dieser Beziehung geht hervor, daß k zeitunabhängig und nur eine Funktion der physikalischen Daten des Bodens ist, denn weder die Zeit τ noch der zeitabhängige Frostradius R treten darin auf, während der Wärmestrom \dot{Q} als konstant vorausgesetzt wurde. Für die Temperaturen selbst gilt die Partikulärlösung der Fourierschen Differentialgleichung:

$$t = k_1 + k_{II} Ei\left(-\frac{r^2}{4 a \tau}\right). \quad (11)$$

Dabei ist das Exponentialintegral $Ei\left(-\frac{r^2}{4 a \tau}\right)$ definiert durch die Beziehung

$$Ei(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{\xi}}{\xi} d\xi. \quad (12)$$

Durch Einführen der Rand- und Anfangsbedingungen in Gl. (11) ergeben sich die Gleichungen für den Temperaturverlauf im gefrorenen und ungefrorenen Gebiet:

$$t_1 = \frac{\dot{Q}}{4 \pi \lambda_1} \left[Ei\left(-\frac{r^2}{4 a_1 \tau}\right) - Ei\left(-\frac{R^2}{4 a_1 \tau}\right) \right] \quad (13)$$

$$t_2 = t_{II} \left[1 - \frac{Ei\left(-\frac{r^2}{4 a_2 \tau}\right)}{Ei\left(-\frac{R^2}{4 a_2 \tau}\right)} \right]. \quad (14)$$

Dabei ist zu beachten, daß die hierzu gehörenden Rand- und Anfangsbedingungen nicht mit den Gln. (4) bis (8) identisch sind, da für die fadenförmige Wärmesenke stets $r_0 = 0$ ist und an die Stelle der vorgeschriebenen Rohrwandtemperatur die Bedingung $\dot{Q} = \text{konst}$ tritt.

Die obige Lösung kann als Grundlage für die Behandlung der ähnlichen, durch die Gln. (1) bis (8) beschriebenen Aufgabe verwendet werden.

Zunächst sei angenommen, an der Wand $r = r_0$ des Gefrierrohrs herrsche die konstante Temperatur t_1 gemäß der Randbedingung Gl. (5). Nach der Fourierschen

¹ STÄNDER, W.: Mathematische Ansätze zur Berechnung der Frostausbreitung in ruhendem Grundwasser im Vergleich zu Modelluntersuchungen für verschiedene Gefrierrohranordnungen im Schacht- und Grundbau. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der TH Karlsruhe, Heft 28, 1967.

² CARSLAW, H. S., u. J. C. JAEGER: Conduction of Heat in Solids, Oxford: Clarendon Press 1959, S. 282ff.

Wärmeleitungsgleichung für den stationären Fall hängt der Wärmestrom linear vom Temperaturgefälle ab. Deshalb besteht die Möglichkeit, aus der Lösung für konstanten Wärmefluß eine Lösung für konstante Rohrwandtemperatur herzuleiten.

Zuerst bestimmt man die Frostgrenze für das idealisierte Problem nach Gl. (9) bis zu einem Zeitpunkt τ_i . Praktisch wird die gleiche Frostgrenze erreicht, wenn der Frost um ein Einzelrohr mit konstanter Wandtemperatur forschreitet, die gleich dem zeitlichen Mittelwert der im Falle konstanten Wärmeflusses herrschenden, veränderlichen Rohrwandtemperatur ist. Für den Gefriervorgang spielt es also keine Rolle, ob an der Rohrwand eine gleichbleibende oder veränderliche Temperatur herrscht, sofern nur der zeitliche Mittelwert der Temperaturen übereinstimmt. Dies läßt sich für ein vereinfachtes Gefrierproblem, bei dem nur die Erstarrungswärme berücksichtigt wird, nachweisen. Für diesen Fall erhält man sowohl mit $t_1 = \text{konst}$, als auch mit $\dot{Q} = \text{konst}$ die einfache Beziehung für die Gefrierdauer:

$$\tau = - \frac{\varrho q_s}{2 \lambda_1 t_1} \left(R^2 \ln \frac{R}{r_0} - \frac{R^2 - r_0^2}{2} \right). \quad (15)$$

Beachtet man nun, daß die Zeit τ bei der fadenförmigen Wärmesenke vom Beginn des Wärmeflusses an zählt, während die Rohrwand erst nach einer bestimmten Zeit τ_0 die Gefriertemperatur erreicht, so muß man als Gefrierzeit am Einzelrohr nur den Zeitraum $\tau_g = \tau_i - \tau_0$ berücksichtigen. Aus dem gleichen Grund wird der Mittelwert der Rohrwandtemperatur zwischen den Grenzen τ_0 und τ_i bestimmt. Dieses Verfahren birgt insofern einen Fehler, als die Umgebung des Rohres zum Zeitpunkt τ_0 bereits vorgekühlt ist, was jedoch in der Anfangsbedingung nicht berücksichtigt wird. Der so entstehende Fehler bleibt aber aus folgenden Gründen klein:

1. Der Einfluß der Vorkühlungswärme des ungefrorenen Gebiets ist meist geringer als der der Erstarrungswärme.
2. Der Einflußbereich der Abkühlung ist zum Zeitpunkt τ_0 wegen des kleinen Rohrhalbmessers eng begrenzt.
3. Die Zeit bis zum Abkühlen der Rohrwand auf die Temperatur $t = 0$ ist klein gegenüber der gesamten Gefrierdauer.

Der Temperaturmittelwert bestimmt sich aus der Beziehung

$$t_m = \frac{1}{\tau_i - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_i} t_1(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Die Funktion $t_1(\tau)$ ist dabei mit Gl. (13) identisch. Für die Rohrwandtemperatur $t_1 = t_m (r = r_0)$ ergibt sich daraus

$$t_1 = \frac{1}{\tau_g} \frac{\dot{Q}}{4 \pi \lambda_1} \int_{\tau_0}^{\tau_i} \left[E i \left(-\frac{r_0^2}{4 a_1 \tau} \right) - E i (-k^2) \right] d\tau. \quad (17)$$

Hieraus folgt nach Integration unter Verwendung der Gln. (9) und (10) und zweckmäßiger Umformung:

$$\begin{aligned} & - \frac{\lambda_2 t_{II}}{\lambda_1 t_1} \\ & = - \frac{E i \left(-\frac{a_1}{a_2} k^2 \right) \exp \left(\frac{a_1}{a_2} k^2 \right)}{\frac{\exp(k^2) R^2}{R^2 - r_0^2} \left\{ \exp \left(-\frac{r_0^2}{R^2} k^2 \right) - \frac{r_0^2}{R^2} \exp(-k^2) + \left(1 + \frac{r_0^2}{R^2} k^2 \right) \left[E i \left(-\frac{r_0^2}{R^2} k^2 \right) - E i (-k^2) \right] \right\}} \\ & - \frac{a_1 \varrho q_s}{\lambda_1 t_1} k^2 E i \left(-\frac{a_1}{a_2} k^2 \right) \exp \left(\frac{a_1}{a_2} k^2 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Die damit gefundene Näherungslösung für den wirklichen Gefriervorgang hat eine sehr unübersichtliche Form und ist umständlich zu handhaben, sofern man alle vorkommenden Größen einzeln einsetzt. Es ist deshalb zweckmäßig, mit Hilfe von Modellgesetzen die einzelnen Einflußgrößen zu dimensionslosen Kenngrößen zusammenzufassen. Diese Kenngrößen lauten:

$$U = - \frac{\lambda_1 t_I}{\lambda_2 t_{II}}, \quad (19)$$

$$V = - \frac{\lambda_1 t_I}{a_1 \varrho q_s} = - \frac{c_1 \varrho_1 t_I}{\varrho q_s}, \quad (20)$$

$$W = \frac{R^2 - r_0^2}{4 a_1 \tau_g}, \quad (21)$$

$$Z = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad (22)$$

$$\beta = \frac{a_1}{a_2}. \quad (23)$$

Hierbei ersetzt die Größe W die Konstante k des idealisierten Problems. Gl. (18) erhält nun die Form:

$$\frac{1}{U} = \frac{E i(-\beta W) e^{\beta W}}{e^{\beta W} \frac{Z}{Z-1} \left\{ e^{-W/Z} - \frac{1}{Z} e^{-W} + \left(1 + \frac{W}{Z}\right) \left[E i\left(-\frac{W}{Z}\right) - E i(-W)\right] \right\}} + \frac{W E i(-\beta W) e^{\beta W}}{V}. \quad (24)$$

Die rechnerische Auswertung dieser Gleichung mit fünf Veränderlichen stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. Hält man jedoch eine der dimensionslosen Größen, beispielsweise β , konstant, so bleiben vier Veränderliche übrig, deren gegenseitige Abhängigkeit in einem Nomogramm dargestellt werden kann. Mit $\beta = \text{konst}$ lautet Gl. (24) in allgemeiner Form:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{V} f(W) + g(Z, W). \quad (25)$$

Gl. (25) läßt sich mit Hilfe von zwei senkrecht aufeinanderstehenden Leitern U und V und zwei Kurvenscharen, von denen eine in ein Geradenbüschel ausartet, darstellen. Jeder Wert der dimensionslosen Größe β erfordert also ein eigenes Nomogramm. Dies ist jedoch kein erheblicher Nachteil, denn erfahrungsgemäß schwankt β für natürlich vorkommende Erdstoffe nur wenig. Außerdem besteht die Möglichkeit, aus zwei oder drei Nomogrammen zu interpolieren. Abb. 137 zeigt ein Nomogramm für $\beta = 3,0$. Das Lösungsverfahren geht aus der Nebenfigur hervor. Zweckmäßigerweise gibt man den Halbmesser R der Frostgrenze vor, weil er in zwei Größen vorkommt. Kennt man die Stoffkonstanten und die Temperaturen, so ist nur noch die Größe W unbekannt. Man sucht den Schnittpunkt der durch die U - und V -Werte gekennzeichneten Geraden a mit der entsprechenden Z -Kurve. Eine Hilfsgerade b vom Ursprung des Nomogramms durch diesen Schnittpunkt liefert auf der W -Leiter den gesuchten Wert, aus dem die Gefrierzeit τ_g mittels Gl. (21) berechnet werden kann.

Wie aus dem Lösungsweg ersichtlich ist, hängt die Genauigkeit dieser Näherungslösung im wesentlichen vom Verhältnis der Gefrierdauer τ_g zur Vorkühlzeit τ_0 , d. h. vom Wert der Größe Z ab. Ein merklicher Fehler, der die Zeichenunge nauigkeiten bei der Auswertung eines der Nomogramme deutlich übersteigt, entsteht nur für kurze Gefrierzeiten, nämlich solange $R/r_0 < 2$ bzw. $Z < 4$. Für große

Werte von Z liegt der theoretische Fehler in den Grenzen der Zeichenungsgenauigkeiten.

c) **Lösung mit Hilfe eines Differenzenverfahrens¹.** Eine große Zahl von Wärmeleitproblemen kann nur mittels numerischer Verfahren gelöst werden. Deshalb liegt es nahe, sich auch zur Lösung der durch die Gln. (1) bis (8) beschriebenen Aufgabe eines solchen Verfahrens zu bedienen. Zunächst steht die Randbedingung im Unendlichen, Gl. (7), der Anwendung eines Differenzenverfahrens im Wege. Mit

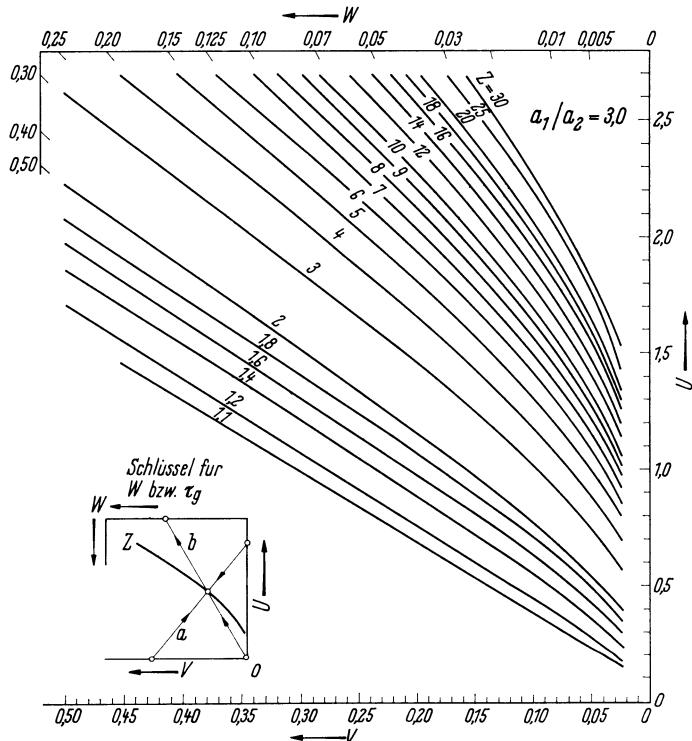


Abb. 137. Nomogramm zur Bestimmung des Frostfortschritts am Einzelrohr (vgl. Fußnote 1, S. 185).

Hilfe einer neuartigen Transformation der Gl. (2) für das ungefrorene Gebiet läßt sich jedoch eine Lösung finden. Eine ausführliche Darstellung des Lösungsweges findet sich bei STÄNDER und LENHARD¹.

Für die Berechnung des Frostfortschritts um ein einzelnes Gefrierrohr in unbegrenzter Umgebung stehen also zwei Lösungen zur Verfügung. Die analytische Näherungslösung ist jedoch so genau, daß man ihr in der Regel den Vorzug gibt. Sie ist aber nur anwendbar, wenn die Stoffgrößen für das Gefrorene und das Ungefrorene konstant sind. Im Gegensatz dazu führt das Differenzenverfahren auch dann zum Ziel, wenn die Stoffgrößen Funktionen der Temperatur oder des Ortes sind. Insbesondere ist es also bei frostschiebenden Böden anwendbar. Die Genauigkeit des Verfahrens wird um so besser, je kleiner die Schrittweiten gewählt werden, d. h. je größer der Rechenaufwand wird. Allerdings darf nicht übersehen werden, daß die numerische Rechnung mit steigender Gefrierzeit ungenauer wird, weil sie vor dem letzten Intervall des ungefrorenen Gebiets abbricht und die da-

¹ STÄNDER, W., u. M. LENHARD: Eindimensionale Wärmeleitvorgänge bei Änderung des Aggregatzustands. VDI-Z. Bd. 108 (1966) Nr. 15, S. 667–672, und Nr. 16, S. 709–711.

durch vernachlässigte Wärmemenge mit der Zeit zunimmt. Auch hierin steht das Differenzenverfahren im Gegensatz zur analytischen Näherungslösung, die mit wachsender Gefrierzeit genauer wird.

3. Übertragung der Lösungen für das Einzelrohr auf das Gefrieren mit mehreren Rohren¹.

Hat man zum Gefrieren eines Bodens eine Anordnung mit mehreren Rohren, so spricht man von einem Rohrverband. Wichtigste Anordnungsformen für das Gefrieren sind der Rohrkreis und das Rohrrechteck, dessen Elemente gerade Rohrreihen sind.

Der Gefriervorgang um ein Rohr eines Rohrverbandes unterscheidet sich bis zum Schließen von der Frostausbreitung um ein einzelnes Gefrierrohr dadurch, daß die Abkühlungswärme des ungefrorenen Gebiets nicht von einem einzigen, sondern teilweise auch von den benachbarten Rohren abgeführt wird. Bei einem Rohrkreis und beim mittleren Teil einer geraden Rohrreihe führen jeweils alle Rohre, sofern die Rohrabstände gleich sind, dieselbe Wärmemenge ab. Auf diesen für die Praxis wichtigsten Fall beschränkt sich die nachfolgende Betrachtung. Der Frostmantel um die einzelnen Rohre wächst unter sonst gleichen Bedingungen im Rohrverband schneller als an einem Einzelrohr. Der Unterschied wird um so größer, je höher die Bodenfangstemperatur t_{II} liegt und je größer die Wärme eindringzahl $b = \sqrt{c \rho \lambda}$ des Bodens, d. h. die Abkühlungswärme Q_a ist².

Hat der Boden bereits zu Beginn des Gefrierens die Gefriertemperatur $t = 0$, so besteht kein Unterschied mehr. Die

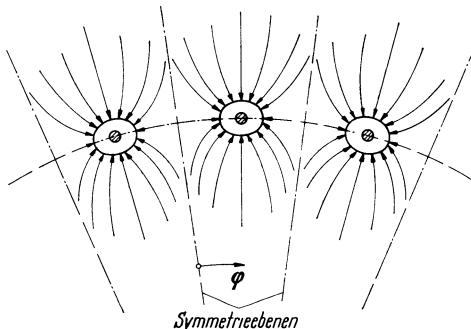


Abb. 138. Wärmestromlinien bei Anordnung der Gefrierrohre auf einem Kreis (schematisch).

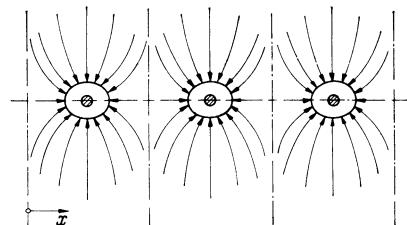


Abb. 139. Wärmestromlinien bei Anordnung der Gefrierrohre in einer Reihe nebeneinander (schematisch).

abzuführenden Wärmen (Erstarrungswärme und innere Abkühlungswärme) sind dann beim Rohr eines Rohrverbandes gleich denen beim Einzelrohr, und der entstehende Frostmantel hat bis zum Zeitpunkt des Schließens immer kreisförmigen Querschnitt.

Liegt die Bodenfangstemperatur über dem Gefrierpunkt, so erhält der Frostkörper ellipsenähnliche Gestalt, weil der Frost in Richtung der Nachbarrohre schneller fortschreitet als senkrecht dazu. Der gegenüber dem Gefrieren mit einem Rohr veränderte Wärmestrom wird deutlich, wenn man das Einflußgebiet des einzelnen Gefrierrohrs durch Symmetrieebenen abgrenzt, in welchen der Temperaturgradient null wird³. Man kann sich die in Abb. 138 und 139 gezeichneten Symmetrieebenen als ideal isolierende dünne Platten vorstellen, durch die keine

¹ STÄNDER, W.: vgl. Fußnote 1, S. 185. — ² Vgl. dieses Handbuch, Bd. III, S. 136.

³ STÄNDER, W.: vgl. Fußnote 1, S. 176.

Wärme hindurchtritt. Der Wärmefluß aus dem ungefrorenen Gebiet ist also auf den Bereich innerhalb eines Sektors begrenzt und kleiner als beim Einzelrohr.

Zur Ermittlung der Schließzeit in einem Rohrverband genügt die Kenntnis des Frostfortschritts in Richtung der Nachbarrohre. Die Berechnung fußt auf den Lösungen für das Einzelrohr, wobei die im Rohrverband geringere äußere Abkühlungswärme dadurch berücksichtigt wird, daß statt der wirklichen Bodenfangstemperatur t_{II} eine niedrigere Temperatur t_{II}^* angenommen wird, mit der die Frostausbreitung um ein Einzelrohr ebenso schnell vor sich geht wie unter den tatsächlichen Bedingungen im Rohrverband.

Die als wirksame Bodenfangstemperatur bezeichnete Rechengröße t_{II}^* ist durch die Gleichung

$$t_{II}^* = f_s t_{II} \quad (26)$$

definiert. Der Schließzeitfaktor f_s gilt nur für die Berechnung der Schließzeit τ_s . Die Ermittlung einer beliebigen Frostgrenze vor dem Schließen ist damit nicht möglich, denn der Faktor f_s ist streng genommen der zeitliche Mittelwert einer veränderlichen Größe für den Zeitabschnitt von $\tau = 0$ bis $\tau = \tau_s$. Ferner ist zu berücksichtigen, daß die Frostgrenze in Richtung der Nachbarrohre schneller als in jeder anderen Richtung vorrückt. Die Anwendung des Faktors f_s muß also auf die Schließzeitberechnung beschränkt bleiben.

Die Größe des so definierten Schließzeitfaktors kann nur experimentell bestimmt werden, indem man bei vorgegebenem Rohrabstand die Schließzeit τ_s mißt. Anschließend wird jene Bodenfangstemperatur t_{II}^* bestimmt, welche unter sonst gleichen Bedingungen beim Gefrieren um ein Einzelrohr hätte herrschen müssen, um in der gleichen Zeit τ_s den gleichen Frostgrenzradius R_s , der dem halben Rohrabstand entspricht, zu erhalten. Damit ist die Aufgabe auf das Einzelrohrproblem zurückgeführt.

Aus Modellversuchen, in denen Rohranordnung, Rohrabstand, Bodenfangstemperatur und Rohrwandtemperatur variiert wurden, ergab sich als Mittelwert aller Messungen der Faktor $f_s = 0,3$. Eine Abhängigkeit des Schließzeitfaktors von den genannten Größen war nicht nachzuweisen.

Die Schließzeit τ_s wird also bei gegebenem Rohrabstand $2R_s$ und bekannten Bodendaten bestimmt, indem man die vorhandene Bodenfangstemperatur t_{II} mit $f_s = 0,3$ multipliziert und mit der so gewonnenen wirksamen Bodenfangstemperatur t_{II}^* nach den Beziehungen für das Einzelrohr den Zeitpunkt $\tau_g = \tau_s$ ermittelt, zu dem gerade der Frostgrenzradius $R = R_s$ ist.

4. Frostausbreitung vor einer ebenen unbegrenzten Gefrierwand.

a) Aufgabenstellung. Das Gefrieren an einer ebenen, unendlich ausgedehnten Wand, deren Temperatur überall gleich und tiefer als der Gefrierpunkt des angrenzenden Mediums ist, stellt ein analoges Problem zu dem zuvor behandelten zylindersymmetrischen Fall dar. In beiden Fällen ist die Temperatur nur von einer Ortskoordinate und der Zeit abhängig. Die Gln. (1) bis (3) werden nun zweckmäßig in kartesischen Koordinaten angegeben, wobei die Ortskoordinate x den Abstand von der Gefrierwand angibt. Dann lauten die Wärmeleitungsgleichungen für das gefrorene und ungefrorene Gebiet

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} \quad (27)$$

und

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}. \quad (28)$$

Gl. (3) bleibt formal unverändert, wobei lediglich x an die Stelle von r tritt. Die Koordinate der Frostgrenze sei weiterhin mit R bezeichnet. Auch die Rand- und Anfangsbedingungen bleiben sinngemäß unverändert. Dabei ist nur zu beachten, daß der innere Rand des gefrorenen Gebiets bei $x = 0$ liegt und die Temperatur der Kühlwand mit t_E bezeichnet wird.

b) Die exakte Lösung von F. Neumann. Die einzige bekannte exakte Lösung für den ebenen Fall wurde von F. NEUMANN für konstante Gefrierwandtemperatur, d. h. die Randbedingung Gl. (5) angegeben¹. Danach ist der Frostfortschritt gegeben durch die Gleichung

$$R = p \sqrt{\tau}. \quad (29)$$

Der Proportionalitätsfaktor p ist durch folgende Beziehung implizit ausgedrückt:

$$-\sqrt{\pi} \frac{\varrho q_s a_1}{t_E \lambda_1} = \frac{\exp(-p^2/4 a_1)}{\frac{p}{\sqrt{4 a_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{p}{\sqrt{4 a_1}}\right)} + \frac{\sqrt{c_2 \varrho_2 \lambda_2} t_{II} \exp(-p^2/4 a_2)}{\sqrt{c_1 \varrho_1 \lambda_1} t_E \frac{p}{\sqrt{4 a_1}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p}{\sqrt{4 a_2}}\right)\right]}. \quad (30)$$

Diese Gleichung besagt, daß der Faktor p zeitunabhängig ist, denn weder die Zeit noch die zeitabhängige Frostwanddicke treten darin auf. Im ebenen Fall rückt also die Frostgrenze proportional der Wurzel aus der Zeit vor.

Die Temperaturfunktionen im Gefrorenen und Ungefrorenen lauten:

$$t_1 = t_E \left[1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4 a_1 \tau}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{4 a_1 \tau}}\right)} \right], \quad (31)$$

$$t_2 = t_{II} \left[1 - \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4 a_2 \tau}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{4 a_2 \tau}}\right)} \right]. \quad (32)$$

Hierin bezeichnet $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}\right)$ die Gauß-Funktion:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4 a \tau}} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (33)$$

Damit ist die Lösung von F. NEUMANN vollständig angegeben. Sie ist auch für veränderliche Gefriertemperaturen anwendbar, wenn der wahre Temperaturverlauf wie beim zylindrischen Problem durch den zeitlichen Mittelwert der Wandtemperatur, bezogen auf die gesamte Gefriedauer bis zum betrachteten Zeitpunkt, ersetzt wird.

Gl. (30) läßt sich nicht nach p auflösen. Durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und der Gauß-Funktion erhält man jedoch für p eine explizite Näherungsbeziehung²:

$$p = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} b_2 t_{II}\right)^2 - 2 \lambda_1 t_E \left(\varrho q_s - \frac{1}{3} c_1 \varrho_1 t_E + \frac{2}{\pi} c_2 \varrho_2 t_{II}\right)} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} b_2 t_{II}}{\varrho q_s - \frac{1}{3} c_1 \varrho_1 t_E + \frac{2}{\pi} c_2 \varrho_2 t_{II}}. \quad (34)$$

Darin bezeichnet $b_2 = \sqrt{c_2 \varrho_2 \lambda_2}$ die Wärmeeindringzahl des Ungefrorenen.

¹ CARSLAW, H. S., u. J. C. JAEGER: Vgl. Fußnote 2, S. 185. GRÖBER, ERK u. GRIGULL: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. 3. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1955.
² STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1, S. 185.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit für Gl. (30) ist die Darstellung in einem Nomogramm, ähnlich dem des zylindersymmetrischen Falls¹. Gl. (30) läßt sich zurückführen auf eine Funktion von vier dimensionslosen Veränderlichen u , v , w und β , die mit den entsprechenden Größen des Einzelrohrproblems wie folgt zusammenhängen:

$$u = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = - \frac{t_{11} \lambda_2 \sqrt{a_1}}{t_E \lambda_1 \sqrt{a_2}}, \quad (35)$$

$$v = \frac{1}{V} = - \frac{a_1 \varrho q_s}{\lambda_1 t_E}, \quad (36)$$

$$w = \frac{p^2}{4 a_1} = \frac{R^2}{4 a_1 \tau}, \text{ entsprechend } W = \frac{R^2 - r_0^2}{4 a_1 \tau}, \quad (37)$$

$$\beta = \frac{a_1}{a_2}. \quad (38)$$

Da beim ebenen Frostfortschritt nur vier Kenngrößen auftreten, genügt ein einziges Nomogramm, um alle Veränderlichen zu erfassen (Abb. 140). Die Anwen-

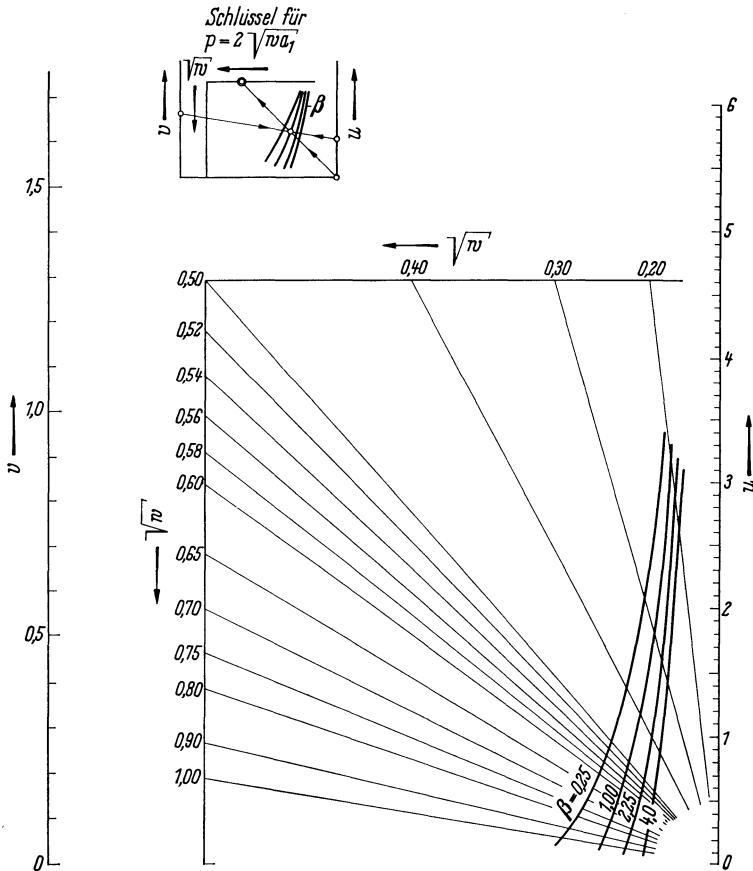


Abb. 140. Nomogramm zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors p für die Frostausbreitung im ebenen Fall (vgl. Fußnote).

¹ STÄNDER, W.: Betrachtungen über den Einfluß der Temperaturverteilung in horizontaler und vertikaler Richtung bei Gefrierschächten. Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Grundbau der TH Karlsruhe, Heft 6, 1961.

dung des Nomogramms geht aus der Nebenfigur in Abb. 140 hervor. Sind alle Bodendaten gegeben, so kennt man die Werte u und v , deren Verbindungsgerade die β -Kurven schneidet. Eine Hilfsgerade vom Punkt $u = 0$ des Nomogramms durch den Schnittpunkt auf der maßgeblichen β -Kurve schneidet auf der w -Leiter einen Funktionswert ab, der mit Hilfe der Gl. (37) die Lösung in Form einer geschlossenen Funktion liefert.

c) Numerische Lösung des ebenen Problems^{1, 2}. Die numerische Lösung, die für den eindimensionalen Wärmefluß mit Zylindersymmetrie bereits beschrieben wurde, läßt sich auch auf den ebenen Fall anwenden. Sie ist wesentlich umständlicher als die Lösung von F. NEUMANN, kann jedoch, wie schon erwähnt, im Gegensatz zu dieser auch dann angewendet werden, wenn die Stoffgrößen des gefrierenden Mediums vom Ort oder von der Temperatur abhängen.

5. Frostfortschritt beim Gefrieren mit mehreren Rohren nach Entstehen eines einheitlichen Frostkörpers².

a) Anwendung der Lösung für die ebene Gefrierwand auf das Gefrieren mit in gerader Reihe angeordneten Rohren. Bei der geraden Rohrreihe liegen die Achsen der Gefrierrohre parallel äquidistant in einer Ebene. Haben sich die gefrorenen Zonen um die einzelnen Rohre so weit ausgedehnt, daß sie einander berühren, so entsteht ein zusammenhängender, geschlossener Frostkörper. Vom Zeitpunkt des Schließen an wird die Rohranordnung als Ganzes betrachtet. Die Berechnung des Frostfortschritts fußt auf der Lösung von F. NEUMANN. Die Voraussetzung für diese Lösung, eine ebene, unbegrenzte Kühlwand mit konstanter Temperatur bewirke das Gefrieren, wird von der Rohrreihe nicht erfüllt. Die Temperatur in der Mittelebene der Rohrreihe ist unmittelbar an den Rohrwänden am tiefsten und in der Mitte zwischen zwei Rohren am höchsten. Man könnte nun annehmen, daß die Dicke der Frostwand nach dem Schließen in Höhe der Rohre am schnellsten und längs der Symmetrieebene zwischen zwei Rohren am langsamsten zunimmt. Aus Modellversuchen geht jedoch das Gegenteil hervor. Die Dickenunterschiede innerhalb der Frostwand gleichen sich nach dem Schließen ziemlich schnell aus, d. h. die Frostbegrenzungen werden eben, obwohl an der Rohrreihe selbst örtlich verschiedene Temperaturen herrschen. Um die Lösung für den ebenen, eindimensionalen Fall anwenden zu können, muß diese Temperaturverteilung durch eine konstante, mittlere Temperatur ersetzt werden.

Bei Annahme stationärer Temperaturverteilung und ebener Frostgrenzen läßt sich das Temperaturfeld innerhalb des Frostkörpers berechnen. Zunächst wird nur ein Gefrierrohr berücksichtigt, in dessen Achse die Temperatur theoretisch gegen minus unendlich gehen würde (singuläre Stelle). Die gesuchte Temperaturfunktion muß die LAPLACE-Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} = 0 \quad (39)$$

und die Randbedingung $t = 0$ für $\eta = 0$ und $\eta = 2R$ sowie $t \rightarrow -\infty$ an der Rohrachse (ξ', η') erfüllen, Abb. 141. Die Temperaturfelder der benachbarten Rohre, deren Abstand d ist, werden überlagert. Betrachtet man nun die Rohrebene $\eta = R$

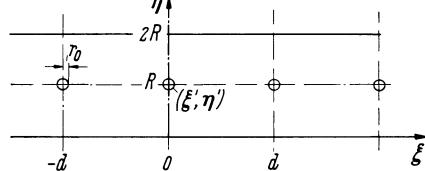


Abb. 141. Bezeichnungen zur Ermittlung der Temperaturverteilung im Frostkörper.

¹ STÄNDER, W., u. M. LENHARD: Vgl. Fußnote 1, S. 188.

² STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1, S. 185.

und normiert die Temperaturen durch Bezug auf die Rohrwandtemperatur t_1 , so gilt bei Anordnung unendlich vieler Singularitäten an den Stellen $\xi = nd$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$t(\xi, R) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh \left[\frac{\pi}{2R} (\xi - nd) \right] - 1}{\cosh \left[\frac{\pi}{2R} (\xi - nd) \right] + 1}}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh \left[\frac{\pi}{2R} (r_0 - nd) \right] - 1}{\cosh \left[\frac{\pi}{2R} (r_0 - nd) \right] + 1}} \quad (40)$$

Integriert man nur zwischen den beiden Rohren $n = 0$ und $n = 1$, vernachlässigt also den Einfluß der Nachbarrohre, so erhält man die mittlere Temperatur t_E der Rohrbene in der dimensionslosen Form

$$E = \frac{t_E}{t_1} = \frac{1}{R} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{d}{2}} t(\xi, R) d\xi = \frac{2}{d} \left[r_0 + \int_{r_0}^{\frac{d}{2}} t(\xi, R) d\xi \right]. \quad (41)$$

Gl. (41) ist in Abb. 142 für verschiedene bezogene Rohrabstände r_0/d dargestellt. Wie leicht einzusehen ist, nähert sich der Faktor E mit fortschreitender Frostdicke

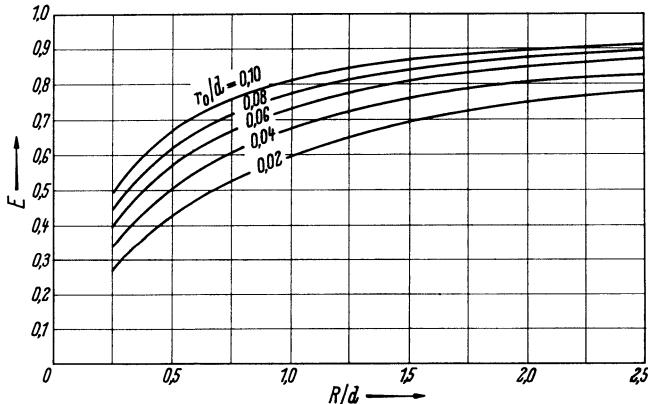


Abb. 142. Verhältnis E der mittleren Temperatur auf der Rohrbene zur Rohrwandtemperatur in Abhängigkeit von der Frostdicke R .

asymptotisch dem Wert $E = 1$. Die E -Kurven beginnen bei der zum Schließzeitpunkt vorhandenen mittleren Frostwanddicke R_s , die einseitig von der Rohrbene nach außen gemessen wird.

Falls die Bodenanfangstemperatur $t_{II} = 0$ ist, sind die Frostzonen um die einzelnen Gefrierrohre kreisförmig und die mittlere Frostwanddicke, die man erhält, wenn man die in Wirklichkeit wellenförmige Frostgrenze bei unverändertem Volum des Gefrorenen durch eine Ebene ersetzt, ergibt sich aus der Beziehung:

$$R_{s0} = \frac{\pi d}{8}. \quad (42)$$

Ist $t_{II} > 0$, so werden die einzelnen Frostzonen oval, weil der Frost in Richtung der Nachbarrohre schneller als in den übrigen Richtungen vordringt, d. h. R_s wird kleiner als nach Gl. (42). Der verlangsamte Frostfortschritt läßt sich mit guter Näherung mittels der Lösung von F. NEUMANN berücksichtigen. Bezeichnet man

den Proportionalitätsfaktor p der Gl. (29) bei vernachlässigter äußerer Abkühlungswärme mit p_i , bei Berücksichtigung aller Wärmen mit p_v , so verhalten sich für gleiche Gefrierzeiten die Frostdicken

$$\frac{R(t_{II} > 0)}{R(t_{II} = 0)} = \frac{p_v}{p_i}. \quad (43)$$

Führt man dieses Verhältnis in Gl. (42) ein, so wird die mittlere Frostwanddicke zum Schließzeitpunkt

$$R_s = \frac{p_v}{p_i} R_{s0} = \frac{p_v}{p_i} \frac{\pi d}{8}. \quad (44)$$

Damit sind die Voraussetzungen für die Berechnung des Frostfortschritts nach dem Schließen gegeben. Sind Schließzeit und zugehörige mittlere Frostwanddicke R_s bekannt, so ergibt sich die Gefrierdauer τ_g bis zum Erreichen der Frostgrenze R_g aus einer Umformung der Gl. (29):

$$\tau_g = \left(\frac{R_g - R_s}{p} + \sqrt{\tau_s} \right)^2. \quad (45)$$

Da die normierte Temperatur E der Rohrebene nur in Abhängigkeit von der Frostwanddicke R bekannt ist, muß man bei der Berechnung des Frostfortschritts stets R_g vorgeben und die zugehörige Gefrierzeit aus Gl. (45) bestimmen. Allerdings darf der zu R_g gehörende E -Wert aus Abb. 142 nicht unmittelbar in die Rechnung eingeführt werden, weil die Temperatur der Rohrebene nicht konstant ist, sondern über die Frostwanddicke R von der Zeit abhängt. Für den Frostfortschritt ist aber der zeitliche Mittelwert der Rohrebentemperatur und nicht der Endwert bei $R = R_g$ maßgebend. Dieser Mittelwert kann nicht exakt berechnet werden, weil dies die Kenntnis der gesuchten Abhängigkeit zwischen R_g und τ_g schon voraussetzen würde. Man kann sich aber helfen, indem man unter Berücksichtigung des bekannten Wertepaares (R_s, τ_s) die Abszisse der Abb. 142 gemäß Gl. (29) quadratisch verzerrt. Der verhältnismäßig flache Verlauf der E -Kurven im wichtigsten Bereich erlaubt jedoch ohne weiteres, die unmittelbar aus Abb. 142 durch graphische Integration gebildeten Temperaturmittelwerte als zeitliche Mittelwerte zu betrachten. Für den allgemeinen Fall, daß die Rohrwandtemperatur t_I nicht konstant ist, sondern im Verlauf des Gefrierens tiefer sinkt, ist die quadratische Verzerrung nicht mehr zulässig. Dann bleibt die letztgenannte Näherung die einzige mögliche.

Aus dem Integralmittelwert E_m der E -Kurve zwischen den Zeitgrenzen $\tau = 0$ und $\tau = \tau_g$ ergibt sich die Temperatur t_E der Rohrebene

$$t_E = E_m t_I. \quad (46)$$

Dazu müssen die E -Kurven bis zum Nullpunkt des Diagramms verlängert werden. Nun kann der Faktor p mit Hilfe von Gl. (34) oder dem Nomogramm Abb. 140 bestimmt werden und liefert gemäß Gl. (45) die gesuchte Gefrierzeit.

Hängt die Rohrwandtemperatur von der Zeit ab, so ist eine Lösung nur durch Iteration möglich. Die Temperaturfunktion $t_I = f(\tau)$ muß dabei bekannt sein. Der Rechengang umfaßt dann folgende Schritte:

Zuerst wird auf die bekannte Weise die Schließzeit τ_s mit einer geschätzten mittleren Rohrwandtemperatur t_I berechnet. Aus der Funktion $t_I = f(\tau)$ wird nun die zu τ_s gehörende Mitteltemperatur abgelesen und mit dem geschätzten Wert verglichen. Weichen die beiden Temperaturen voneinander ab, so liegt der wahre Wert stets zwischen ihnen, d. h. das Verfahren konvergiert und der Rechenaufwand richtet sich nur nach den Genauigkeitsansprüchen. Nachdem der Mittelwert der Rohrwandtemperatur bis zum Schließen bekannt ist, lassen sich die Faktoren

p_v und p_i ermitteln, wobei in Gl. (34) oder in den Kenngrößen des Nomogramms t_1 an die Stelle von t_E tritt. Nun liefert Gl. (44) die mittlere Frostwanddicke R_s .

Der weitere Frostfortschritt ist zunächst zu schätzen, was mit Hilfe des bekannten Wertpaars (R_s, τ_s) , das in ein R, τ -Diagramm eingetragen wird, verhältnismäßig gut gelingt. Dazu wird für eine gegebene Frostgrenze R_g die Gefriedauer τ_g angenommen, wonach erneut ein zeitlicher Mittelwert für die Rohrwandtemperatur aus der Funktion $t_1(\tau)$ abzulesen ist. Auch die normierte Rohrebenentemperatur muß erneut zwischen $\tau = 0$ und $\tau = \tau_g$ gemittelt werden. Das weitere Vorgehen entspricht der Beschreibung für $t_1 = \text{konst}$. Das Ergebnis τ_g wird mit dem geschätzten Wert verglichen, der daraufhin gegebenenfalls für einen neuen Rechengang verbessert wird, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Das Verfahren ist wiederum konvergent. Wird jedoch τ_g vorgegeben und die Frostgrenze geschätzt, so führt die Iteration nicht zum Ziel.

b) Das Gefrieren mit kreisförmig angeordneten Rohren. Wie bei der Rohrreihe wird die kreisförmige Anordnung der Rohre nach dem Schließen als Ganzes be-



Abb. 143a—c. Frostausbreitung am Rohrkreis im Modellversuch.

werden allmählich kreisförmig, wie die Abb. 143a—c, die im Verlauf eines Modellversuches aufgenommen wurden, bestätigen¹. Die zugehörigen Zeiten sind an den Uhren im Bild abzulesen. Hier erscheint der Frostkörper als dunkle, das Ungefrorene als helle Fläche. Die Frostlücke links in den Bildern diente dem Studium des praktisch wichtigen Falls, daß einzelne Rohre infolge Verlaufens der Gefrier-

¹ STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1, S. 182.

trachtet. Im Grundriß liegen die Rohrachsen alle auf einem Kreis, der als Gefrierrohrkreis bezeichnet wird. Die Temperatur längs dieses Rohrkreises tritt nun an die Stelle der Rohrwandtemperatur. Ähnlich wie beim ebenen Frostfortschritt wird die in Wirklichkeit vom Zentriwinkel φ abhängige Temperatur auf dem Rohrkreis durch eine konstante Mitteltemperatur ersetzt. Dieses Vorgehen ist berechtigt, weil die Frostgrenzen so fortschreiten, als werde die Wärme von einer zylindrischen Wand von überall gleicher Temperatur abgeführt, d. h. die unmittelbar nach dem Schließen wellenförmigen Frostgrenzen

rohrbohrungen zu weit auseinanderstehen. Die Lücke schließt sich wesentlich später als der übrige Frostmantel und beeinflußt dadurch maßgebend die gesamte Gefrierdauer. In einem solchen Fall ist es unter Umständen günstiger, ein zusätzliches Gefrierohr in die Lücke einzubringen.

Analog zum ebenen Fall werden für die Berechnung der Temperaturverteilung feststehende Frostgrenzen mit den Achsabständen R_a und R_i vom Rohrkreismittelpunkt und der Temperatur $t = 0$ angenommen. Die Achsen der Gefrierohre sind wiederum singuläre Stellen der Temperaturverteilung mit den Koordinaten (r_R, φ_v) . Durch Lösen der LAPLACE-Differentialgleichung mit Hilfe der GREENSchen Funktion für den Kreisring erhält man zunächst das Temperaturfeld für ein einzelnes Rohr, woraus durch Superposition der benachbarten Felder die gesuchte Temperaturverteilung gefunden wird. Werden die Temperaturen auf die Rohrwandtemperatur t_l bezogen, so ist

$$t = 1 \text{ für } \begin{cases} r = r_R \\ \varphi = \frac{2\pi\nu}{n} \pm 2 \arcsin \frac{r_0}{2r_R} \end{cases}, \quad (47)$$

wie aus Abb. 144 leicht abzulesen ist. Dabei sind n Kühlrohre vorhanden, die an den Stellen $\varphi = \frac{2\pi\nu}{n}$ mit $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$ liegen. Damit wird die Temperaturverteilung längs des Rohrkreises

$$t(R_a, R_i, \varphi) = \frac{\ln \prod_{\nu=0}^{n-1} \left[1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \ln \frac{r_R}{R_i} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \ln \frac{r_R}{R_i} \right) + \sinh^2 \left\{ \frac{\pi}{2 \ln \frac{R_a}{R_i}} \left[f \left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n} \right) \right] \right\}} \right]}{\ln \prod_{\nu=0}^{n-1} \left[1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \ln \frac{r_R}{R_i} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \ln \frac{r_R}{R_i} \right) + \sinh^2 \left\{ \frac{\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \left[f \left(\frac{\pi\nu}{n} - \arcsin \frac{r_0}{2r_R} \right) \right] \right\}} \right]} \quad (48)$$

Die Funktion $f\left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n}\right)$ ist wie folgt definiert:

$$f\left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n}\right) = \begin{cases} \left| \varphi - \frac{2\pi\nu}{n} \right| & \text{für } \left| \varphi - \frac{2\pi\nu}{n} \right| \leq \pi \\ 2\pi - \left| \varphi - \frac{2\pi\nu}{n} \right| & \text{für } \left| \varphi - \frac{2\pi\nu}{n} \right| > \pi. \end{cases} \quad (49)$$

Die dimensionslose Mitteltemperatur auf dem Rohrkreis erhält man durch Integration der Temperatur $t = t(R_a, R_i, \varphi)$ zwischen zwei Rohren:

$$E = \frac{t_K}{t_l} = \frac{n}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{n}} t(R_a, R_i, \varphi) d\varphi. \quad (50)$$

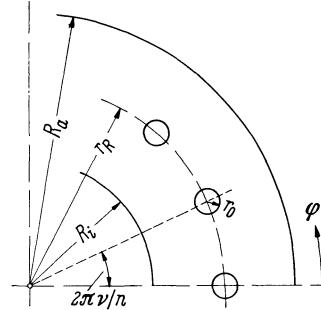


Abb. 144. Bezeichnungen zur Bestimmung der mittleren Rohrkreis-temperatur.

Gl. (50) ist in Abb. 145 mit $r_0/r_R = 0,01$ als Parameter ausgewertet. Die Abszissenachse trägt zwei Teilungen für den auf den Rohrkreisradius bezogenen Achsabstand der inneren und äußeren Frostgrenze. Demnach sind innere und äußere Frostgrenze einander fest zugeordnet, was nur dann wirklich zutrifft, wenn die

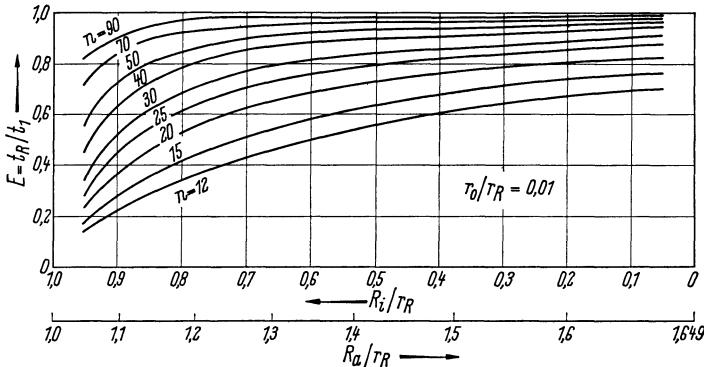


Abb. 145. Verhältnis E der mittleren Temperatur auf dem Rohrkreis zur Gefriertemperatur in Abhängigkeit vom Frostradius. n = Anzahl der Rohre.

Abkühlungswärme des Ungefrorenen vernachlässigt werden kann, d. h. für $t_{II} = 0$. Für diesen Fall besteht zwischen R_i und R_a die zeitunabhängige Beziehung¹:

$$2 R_a^2 \ln \frac{R_a}{r_R} - R_a^2 = 2 R_i^2 \ln \frac{R_i}{r_R} - R_i^2. \quad (51)$$

Sie ist in Abb. 146 dargestellt.

Um einen Eindruck davon zu geben, wie die oben getroffenen Annahmen mit der Wirklichkeit übereinstimmen, sind in Abb. 147 die Meßergebnisse eines Analogieveruchs an einem elektrischen Modell wiedergegeben¹. Hier ist ersichtlich, daß die Isothermen besonders in den Randzonen des Frostkörpers so verlaufen, als herrsche auf dem Rohrkreis eine gleichmäßige Temperaturverteilung.

¹ STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1 S. 192.

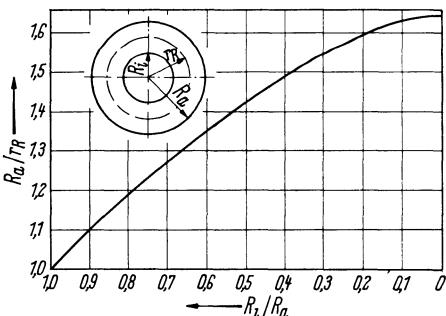


Abb. 146. Auf den Rohrkreisradius r_R bezogene Abhängigkeit des äußeren Frostkreisradius R_a vom inneren Frostkreisradius R_i .

trennt für den Innen- und Außenraum ermittelt. Der Einfluß der Abkühlungswärmen des gefrorenen und ungefrorenen Gebiets wird in erster Näherung durch Vergleich mit dem ebenen Fall berücksichtigt. Bezeichnet man den Proportionalitätsfaktor p in Gl. (29) bei ausschließlicher Berücksichtigung der Kristallisationswärme mit p_k , so ist der Quotient $(p_k/p_v)^2$ ein Maß für die Verlängerung der Gefrierzeit durch die Abkühlungswärmen im ebenen Fall. Allerdings bringt die zylindrische Form des Frostmantels einen im Vergleich zum ebenen Problem ver-

Nachdem die mittlere Temperatur t_K auf dem Rohrkreis bekannt ist, kann der Frostfortschritt für den Innen- und Außenraum des Rohrkreises berechnet werden. Eine exakte Lösung für diese Aufgabe ist nicht bekannt. Man geht deshalb so vor, daß man zunächst nur die Erstarrungswärme berücksichtigt und hierfür die Beziehung $R = f(\tau)$ ge-

größeren Wärmefluß aus dem äußeren, ungefrorenen Gebiet und einen verkleinerten Wärmefluß aus dem Innenraum. Dieser Umstand wird durch eine zweite Korrektur berücksichtigt.

Zunächst sind die zum Schließzeitpunkt wellenförmigen Frostgrenzen durch konzentrische Kreise in den Abständen R_{si} und R_{sa} vom Rohrkreismittelpunkt zu

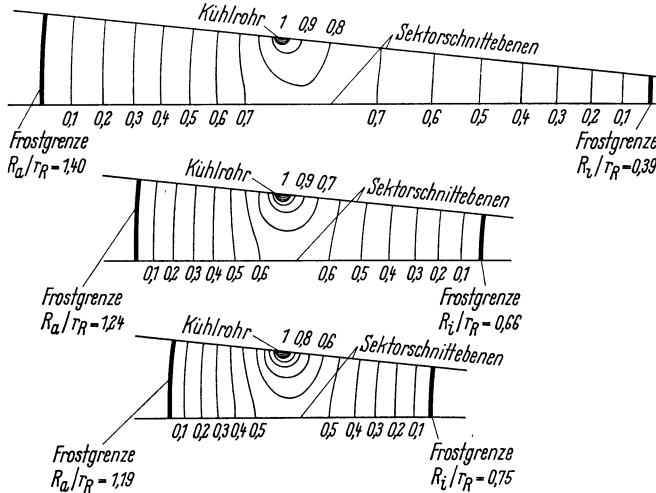


Abb. 147. Temperaturverteilung innerhalb des Frostkörpers für verschiedene Frostmantelstärken, bezogen auf die Rohrwandtemperatur.

ersetzen. Der beim ebenen Problem erläuterte Gedankengang des Flächenausgleichs ergibt hier für den Außenraum, d. h. die äußere Frostgrenze

$$R_{sa} = \left[\left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2n}} - 1 \right) \frac{p_o}{p_i} + 1 \right] r_R \quad (52)$$

und für die innere Frostgrenze

$$R_{si} = \left[1 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2n}} \right) \frac{p_o}{p_i} \right] r_R. \quad (53)$$

Für die Gefrierdauer τ_k nach dem Schließen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Kristallisationswärme gilt

$$\tau_k = - \frac{\frac{\rho}{\lambda_1} q_s}{\int_{R_{sa}, R_{si}}^{\frac{R_o, R_i}{r}} \frac{r \ln \frac{r}{r_R}}{E} dr}. \quad (54)$$

Das Integral in Gl. (54) muß graphisch ermittelt werden, indem der Integrand für verschiedene Radien r mit dem durch Gl. (50) gegebenen Wert E berechnet wird. Bei veränderlicher Rohrwandtemperatur t_I wird deren zeitlicher Mittelwert in Gl. (54) eingeführt.

Der Einfluß der Zylindergeometrie auf den Frostfortschritt im Vergleich zum ebenen Fall läßt sich näherungsweise berechnen¹.

Die äußere Abkühlungswärme beim Gefrieren eines zylindrischen Frostkörpers ist gegenüber dem ebenen Fall um die zeitunabhängige Wärmemenge

$$Q = \frac{\lambda_2 t_{II}}{R_a + r_R} \quad (55)$$

¹ STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1 S. 185.

größer. Diese Wärme verzögert den Frostfortschritt in den Außenraum des Rohrkreises. Sie wird in Gl. (29) nach deren Differentiation eingeführt:

$$\frac{d R}{d \tau} = \frac{p_v}{2 \sqrt{\tau}} - \frac{\lambda_2 t_{II}}{(R_a + r_R) \varrho q_s} = \frac{p_v}{2 \sqrt{\tau}} - C. \quad (56)$$

Die Integration der Gl. (56) liefert die Gefrierzeit τ_v unter Berücksichtigung aller Wärmeanteile und des Einflusses der Zylinderform für den Frostfortschritt vom Rohrkreis nach außen, wenn gleichzeitig der bereits erwähnte Verlängerungsfaktor $(p_k/p_v)^2$ eingesetzt wird.

$$\tau_{va} = \left\{ \frac{p_k}{p_v} \left[1 + \frac{C(R_a - r_R)}{p_v^2} + \frac{2C^2(R_a - r_R)^2}{p_v^4} + \dots \right] \right\}^2 \tau_k. \quad (57)$$

Das entsprechende Vorgehen für den Innenraum des Rohrkreises liefert die Beziehung

$$\tau_{vi} = \left\{ \frac{p_k}{p_v} \left[1 - \frac{C(r_R - R_i)}{p_v^2} + \frac{2C^2(r_R - R_i)^2}{p_v^4} - + \dots \right] \right\}^2 \tau_k. \quad (58)$$

Der Wert des Korrekturfaktors in der eckigen Klammer ist in Gl. (57) größer und in Gl. (58) kleiner als eins. Die Zylinderform der Kühlfläche und der Frostgrenzen bewirkt also im Vergleich zum ebenen Fall eine Verzögerung der Frostausbreitung nach außen und eine Beschleunigung der Frostausbreitung nach innen. Die Reihen in Gl. (57) und (58) konvergieren so rasch, daß sie nach dem dritten Glied abgebrochen werden dürfen.

Zusammengefaßt ergibt sich damit folgender Rechengang für die Ermittlung der Gefrierzeit nach dem Schließen, wenn alle Stoffgrößen und Temperaturen sowie die Abmessungen der Rohranordnung bekannt sind:

Gesucht werde die Zeit bis zum Erreichen der Frostgrenze R_a . Dazu ist zunächst aus Gl. (50) mit Hilfe der Gl. (48) die normierte Temperatur E zu bestimmen. Einfacher ist die Benutzung des Diagramms Abb. 145, sofern der Quotient r_0/r_R nicht zu sehr von dem dort geltenden Wert $r_0/r_R = 0,01$ abweicht. Zwecks Berechnung der Mitteltemperatur t_K auf dem Rohrkreis muß die gesuchte Zeit vorläufig geschätzt werden. Dann ergibt sich aus der als bekannt vorausgesetzten Funktion $t_I = f(\tau)$ eine zeitlich mittlere Rohrwandtemperatur, mit der vorerst gerechnet wird. Wie im ebenen Fall ist aus der E -Kurve ein zeitlicher Mittelwert E_m zu bilden, in erster Näherung durch den Integralmittelwert der Kurve $E = f(R_a)$ ersetzt werden darf. Mit ihm ist die mittlere Rohrkreistemperatur t_K zu berechnen. Es ist zweckmäßig, die Funktion $E_m = f(R_a)$ aufzuzeichnen, um für beliebige Frostgrenzradien R_a den Wert E_m ablesen zu können. Damit wird die graphische Integration der Gl. (54) erleichtert. Die untere Grenze des Integrals liefert Gl. (52), deren Faktoren p_v und p_i aus Gl. (34) oder dem Nomogramm Abb. 140 mit t_K an Stelle von t_E berechnet werden. Werden nun der Korrekturfaktor C aus Gl. (56) und der Proportionalitätsfaktor p_k entsprechend p_i , jedoch zusätzlich mit $c_1 = 0$, ermittelt, so sind in Gl. (57) alle Größen zur Bestimmung der Gefriedauer τ_{va} bekannt. Zu diesem Ergebnis τ_{va} ist die Schließzeit τ_s zu addieren, um die gesamte Gefrierzeit τ_g zu erhalten. Die Gefrierzeit τ_g ist mit dem eingangs geschätzten Wert zu vergleichen. War der Schätzwert zu groß, so wird das Rechenergebnis kleiner als der wahre Wert sein und umgekehrt, sofern die Gefriertemperatur t_I mit der Zeit tiefer sinkt, was praktisch immer der Fall ist. Das Iterationsverfahren konvergiert ziemlich rasch. Die Schätzung des Anfangswertes τ_g wird durch Zuhilfenahme des bekannten Wertepaares (R_{sa}, τ_s) erleichtert.

c) **Die rechnerische Behandlung sonstiger Rohranordnungen.** Die in der Praxis üblichen Rohranordnungen lassen sich auf die behandelten Fälle der Ebene und des Zylinders zurückführen, wobei jedoch die für die Berechnung notwendigen

idealisierten Vereinfachungen im allgemeinen einen größeren Fehler verursachen als bei den beschriebenen Grundtypen.

Die angegebenen Rechenverfahren wurden an Modellversuchen überprüft, wobei die Gefrierzeitbestimmung mit maximalen Fehlern bis zu 5% behaftet war. Stets war die gemessene Gefrierzeit kleiner als die berechnete, d. h. bezüglich der praktischen Erfordernisse lagen die Abweichungen auf der sicheren Seite. Der Gesamtfehler enthält allerdings auch die Fehler, die bei der Bestimmung der Stoffgrößen auftreten und in die Rechnung zwangsläufig eingehen. Auf Grund der sorgfältigen mehrfachen Messung dieser Größen spielen diese Ungenauigkeiten hier eine untergeordnete Rolle.

Bei Baugrubenumschließungen in rechteckiger oder quadratischer Form geschieht die Berechnung der Gefrierdauer nach dem Verfahren für den ebenen Fall. Da die Frostwanddicke hier durchweg im Vergleich zum Baugrubendurchmesser klein ist, brauchen die unterschiedlichen thermischen Verhältnisse auf beiden Seiten der vier Rohrreihen, nämlich einerseits die unbegrenzte Umgebung, andererseits der begrenzte Innenraum der Baugrube nicht berücksichtigt zu werden. Das Berechnungsverfahren für den ebenen Frostfortschritt wird man auch dort anwenden, wo die Gefrierrohre an leicht gekrümmten Linien aufgereiht sind, d. h. immer dann, wenn die Frostwanddicke klein gegenüber dem Krümmungsradius der Grundrißlinie der Rohranordnung ist.

Liegen die Rohrachsen auf einem Kegelmantel, so müssen mehrere Grundrisse, d. h. mehrere Rohrkreise mit verschiedenen Durchmessern untersucht werden. Die Wärmestromlinien liegen hier nicht mehr genau in der Grundrißebene, jedoch kann diese Abweichung gegenüber den Berechnungsannahmen vernachlässigt werden, da die üblichen Kegelwinkel sehr spitz sind und die Rohranordnung sich damit nur wenig von der Zylinderform unterscheidet.

6. Sonderfälle in der Anwendung des Gefrierverfahrens.

a) Frotausbreitung in strömendem Grundwasser¹. Die Frotausbreitung in strömendem Grundwasser ist wesentlich schwieriger zu erfassen als in ruhendem Grundwasser. Zunächst stellt die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers einen zusätzlichen Parameter des Problems dar. Darüber hinaus wird die Symmetrie des Frostfortschritts gestört, so daß der Wärmefluß nicht mehr als eindimensional betrachtet werden darf. Schließlich ändern sich die Wärmeübergangsverhältnisse an der Frostgrenze während der ersten Phase des Gefrierens bis zum Schließen, da die Strömungsgeschwindigkeit zwischen benachbarten Gefrierrohren entsprechend der stetigen Verengung des Strömungsquerschnitts zunimmt. Die Wärmeleitfähigkeit des durchströmten Bodens senkrecht zur Strömungsrichtung ändert sich in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit².

Es ist bisher nicht gelungen, alle diese Faktoren rechnerisch zu berücksichtigen. Deshalb ist man hier auf Modellversuche angewiesen, deren Ergebnisse mit Hilfe geeigneter Modellgesetze auf die Praxis übertragen werden müssen.

Bezeichnet man mit \bar{w} die Strömungsgeschwindigkeit, bezogen auf den gesamten Bodenquerschnitt und mit l allgemein eine Länge, z. B. Rohrdurchmesser oder Rohrabstand, so gelten folgende Gesetzmäßigkeiten, wenn die Modellgrößen

¹ STÄNDER, W.: Die physikalischen Grundlagen des Gefrierverfahrens. Rationalisierung im Bergbau, Schriftenreihe der Arbeitsgemeinschaft für Rationalisierung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 60 (1962) S. 57–80. Verkehrs- und Wirtschaftsverlag Dr. Borgmann, Dortmund.

² KLOCKE, H. J.: Wärmeleitfähigkeit flüssigkeitsdurchströmter körniger Schüttungen. Diss. TH Karlsruhe 1965.

durch einen Strich unterschieden werden:

$$\frac{\bar{w}l}{a_2} = \frac{\bar{w}'l'}{a'_2}, \quad (59)$$

$$\frac{\varrho q_s l^2}{\lambda_1 t_1 \tau} = \frac{(\varrho q_s)' l'^2}{\lambda'_1 t'_1 \tau'}, \quad (60)$$

$$\frac{\lambda_1 t_1}{\lambda_2 t_{II}} = \frac{\lambda'_1 t'_1}{\lambda'_2 t'_{II}}, \quad (61)$$

$$\frac{a_1 \tau}{l^2} = \frac{a'_1 \tau'}{l'^2}. \quad (62)$$

In dem Modellgesetz Gl. (61) erscheint das Verhältnis t_1/t_{II} , d. h. die Frostausbreitungsvorgänge im strömenden Grundwasser sind, abgesehen vom zeitlichen Verlauf gemäß Gl. (60), unabhängig vom Absolutwert der Temperatur t_{II} des strömenden Grundwassers und der Gefriertemperatur t_1 . Dies gilt zwar für hohe Strömungsgeschwindigkeiten des Wassers, kann jedoch bei niedrigen Geschwindigkeiten zu unrichtigen Ergebnissen führen, weil das Temperaturfeld dann stärker von einem stationären Feld abweicht. Damit spielen auch die Absolutwerte von t_1 und t_{II} eine Rolle, d. h. man hat im Modellversuch die gleichen Temperaturen wie in der Praxis zu wählen. Verwendet man für die Versuche die gleiche Bodenart, die in der Praxis vorliegt, so läßt sich Gl. (62) auf Gl. (60) zurückführen und es verbleiben drei Gleichungen, die sich in Form eines Diagramms darstellen lassen (Abb. 148). Gibt man beispielsweise $\frac{w l}{a_2}$ und $\frac{\lambda_1 t_1}{\lambda_2 t_{II}}$ vor, so liefern die Versuchsergebnisse die Teilung der Abszissenachse $\frac{\varrho q_s l^2}{\lambda_1 t_1 \tau}$, womit die Aufgabe für den Fall gelöst ist, daß in Modell und Praxis das gleiche Medium gefriert, und zwar sowohl hinsichtlich der Stoffgrößen des Kornmaterials als auch der strömenden Flüssigkeit. Zur Übertragung von Versuchsergebnissen auf Gefrierverfahren in anderen Medien reichen die Modellbedingungen Gl. (59) bis (62) nicht aus.

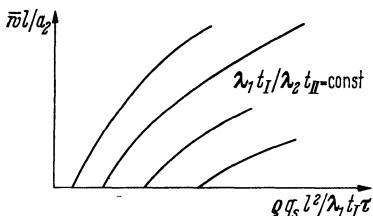


Abb. 148. Schema für die Auswertung von Modellversuchen in strömendem Grundwasser.

Das Gefrieren in strömendem Grundwasser ist wesentlich aufwendiger als in ruhendem Grundwasser. Je nach Strömungsgeschwindigkeit und Grundwassertemperatur werden beträchtliche Wärmemengen aus größerer Entfernung an die Gefrierrohre herangeführt,

die unter Umständen das Schließen der Frostwand verhindern. Mehr als in ruhendem Grundwasser hängt der Erfolg des Gefrierverfahrens von einer sorgfältigen Planung und der genauen Kenntnis der Boden- und Grundwasserströmungsverhältnisse ab.

b) Das Gefrieren frostschiebender Formationen. Feinkörnige Bodenarten, vor allem Tone, gefrieren nicht bei einheitlicher Temperatur. Vielmehr wird die Erstarrung des Porenwassers unter der Einwirkung molekularer Oberflächenkräfte und mitunter auch chemischer Bindungen verzögert. Diese Kräfte treten bei grobkörnigen Böden, bei denen das Verhältnis der Kornoberflächen zum gesamten Kornvolumen wesentlich kleiner als bei bindigen Böden ist, nicht in Erscheinung.

Im feinkörnigen Boden erstarrt das Wasser in Porenmitte zuerst und verstopft die Poren. Die Wassermoleküle im Bereich der Oberflächen gefrieren entsprechend den auf sie wirkenden Kräften erst bei tieferer Temperatur. Die hierdurch eintretende Volumvergrößerung kann nicht durch Verdrängung noch vorhandenen Wassers ausgeglichen werden, weil einmal die Durchlässigkeit bindiger Böden

wesentlich kleiner als die grobkörniger Böden ist und zum anderen die zuerst gebildeten Eispropfen die Durchlässigkeit weiter herabsetzen. Das entstehende Eis muß also die benachbarten Körner seinem Platzbedarf entsprechend auseinandertreiben. Dies äußert sich in einer Volumvergrößerung des gefrierenden Bodens, die mit großer Gewalt vor sich geht und als Frostschiebung bezeichnet wird. Die Ausdehnung kommt im Verlauf der Temperatursenkung zum Stillstand, wenn die thermische Zusammenziehung der Feststoffe (Eis und Körner) die Volumenzunahme durch weiteres Erstarren von Porenwasser gerade ausgleicht. Der Umkehrpunkt der Volumänderung liegt für jede Bodenart bei einer anderen Temperatur.

Dieses besondere Verhalten bindiger, d. h. feinkörniger Böden ist für die Anwendung des Gefrierverfahrens ungünstig. Da der Gefrierprozeß so lange betrieben werden muß, bis die verfestigten Böden durch Bauwerke, z. B. Schachtauskleidungen, abgestützt sind, ist damit zu rechnen, daß die Temperatur des Frostkörpers nach Einbringen des Ausbaus noch tiefer sinkt. War während des Einbringens der Umkehrpunkt der Volumänderung noch nicht erreicht, so gerät der Ausbau nun unter Frostdruck und kann zerstört werden. Der Gefrierschachtbau ist reich an Beispielen für Schäden, die durch Frostschiebungen verursacht wurden.

Das Frostverhalten eines Bodens entzieht sich der rechnerischen Erfassung und kann nur experimentell ermittelt werden. Infolge der Überlagerung verschiedener Effekte und gewisser Nebenerscheinungen ist man dabei zu verhältnismäßig großem Aufwand gezwungen. Beispielsweise enthält Grundwasser stets gelöste Gase, die beim Gefrieren teilweise frei werden oder je nach Druck und Temperatur feste Hydrate bilden. Dadurch wird die Volumänderung erheblich beeinflußt. Besonders beim Auftreten von Gasen spielt der Druck, unter dem der Boden steht, eine große Rolle.

Die Berechnung der Frostausbreitung stößt auf ähnliche Schwierigkeiten. Das Gebiet zwischen Wärmesenke und Frostgrenze ist nicht mehr vollständig gefroren; vielmehr nimmt der Anteil des Eises in Richtung fallender Temperatur mehr oder weniger kontinuierlich zu. Entsprechend ändern sich auch Wärmeleitzahl und Temperaturleitzahl noch innerhalb des gefrorenen Gebiets erheblich. Der Versuch einer Berechnung hätte also nur dann Sinn, wenn diese Stoffgrößen für jeden Eisgehalt bekannt wären. Eine Messung dieser Daten an Bodenproben kann mit so großen Fehlern behaftet sein, daß sie nicht mehr als Grundlage einer Berechnung geeignet ist. Erst der Einsatz besonderer Meßverfahren im ungestörten Boden verspricht Erfolg.

II. Die Bestimmung der thermischen Stoffgrößen von Erdstoffen.

1. Wärmeleitzahlen für den gefrorenen und ungefrorenen Zustand.

Beim Gefrieren von Erdstoffen hat man es in der Regel mit einem Mehrstoffgemisch von Kornmaterial, Flüssigkeit und Gas zu tun. Sind die Wärmeleitzahlen der Gemischkomponenten und ihre Raumanteile bekannt, so bieten sich verschiedene Theorien an, nach denen die Wärmeleitzahl des Gemisches berechnet werden kann. Diese Theorien sind aber noch so unvollkommen, daß die Rechenergebnisse sehr unzuverlässig werden. Aus diesem Grund ist die experimentelle Bestimmung der Wärmeleitzahlen vorzuziehen.

Hier gibt es nun zwei grundsätzlich verschiedene Meßverfahren, nämlich die allgemein bekannten Messungen bei stationärem Wärmefluß und die weniger gebräuchliche Messung im instationären Temperaturfeld. Bei der stationären Messung sitzt die Bodenprobe zwischen zwei ebenen oder zylindrischen Wänden von verschiedener, aber konstanter Temperatur.

Die Theorie der instationären Messung geht von einer unendlich langen Wärmequelle mit dem Durchmesser $d = 0$, einer sog. fadenförmigen Wärmequelle aus. Diese Wärmequelle bewirkt in einem homogenen, unbegrenzten Medium einen radial gerichteten Wärmefluß, welcher der Fourierschen Differentialgleichung in Form der Gl. (1) gehorchen muß.

Für die Messung der Wärmeleitzahlen werden Sonden in Form langer, runder Stäbe verwendet, die in der Achse einen Heizstab und in der Oberfläche Thermoelemente zur Temperaturmessung tragen. Die Abweichungen einer solchen Sonde von der Theorie der fadenförmigen Wärmequelle sind durch Korrekturen zu berücksichtigen.

Eine Messung nach dem instationären Verfahren dauert nur rund 15 Minuten, während die stationäre Messung, da nach Einstellen der Versuchsbedingungen der stationäre Zustand abgewartet werden muß, stets mehrere Stunden in Anspruch nimmt. Bezuglich der Genauigkeit ist die Sondenmessung nur wenig unterlegen; sie bietet aber den wesentlichen Vorteil, daß Messungen der gesuchten Wärmeleitzahlen an Ort und Stelle, d. h. im ungestörten Boden möglich sind. Deshalb ist der Sondenmessung für die Praxis der Vorzug zu geben.

Die Messung der Wärmeleitzahlen an Bodenproben im Labor birgt die Gefahr außerordentlich großer Meßfehler, weil durch Veränderung der Umgebungsbedingungen auch die Probe beeinflußt wird und nicht mehr dem natürlichen Lagerungszustand des Bodens entspricht. Vor allem sind Fehlmessungen dann zu erwarten, wenn das Porenwasser einer wassergesättigten, tiefliegenden Bodenschicht gelöste Gase enthält¹. Wird mit Hilfe einer Kernbohrung eine Bodenprobe aus dieser Schicht gezogen, so wird sie auf Atmosphärendruck entspannt, wodurch das Lösungsgleichgewicht der Gase gestört wird. Da die Löslichkeit der Gase im Wasser mit sinkendem Druck abnimmt, wird je nach dem ursprünglichen Sättigungsgrad des Porenwassers mehr oder weniger Gas frei, das teils entweicht, teils in der Probe verbleibt und diese aufbläht. Dadurch wird die Wärmeleitfähigkeit der Probe gegenüber dem natürlichen Zustand stark herabgesetzt. In gleicher Weise wirkt ein Temperaturanstieg; allerdings sind die Unterschiede zwischen der natürlichen Schichttemperatur und der Arbeitstemperatur im Labor im allgemeinen nicht groß.

2. Rechnerisch zu bestimmende Größen.

Bodenmechanische Untersuchungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde, liefern den Wassergehalt und den Kornanteil der zu gefrierenden Böden. Darüber hinaus werden Kornart, Korngrößenverteilung und gegebenenfalls Salzgehalt des Wassers ermittelt. Aus diesen Meßwerten lassen sich die für die Berechnung des Frostfortschritts benötigten Stoffgrößen berechnen. Die spezifische Wärme im gefrorenen und ungefrorenen Zustand ergibt sich nach der Mischungsregel

$$\begin{aligned} c_1 \varrho_1 &= n c_E \varrho_E + (1 - n) c_K \varrho_K, \\ c_2 \varrho_2 &= n c_W \varrho_W + (1 - n) c_K \varrho_K. \end{aligned} \quad (63)$$

Hierin kennzeichnet n den Volumanteil des Wassers (Index W) bzw. Eises (Index E), während der Index K das Kornmaterial bezeichnet.

Die auf das Volum bezogene Erstarrungswärme ϱq_s ist mit dem Faktor n ebenfalls bekannt:

$$\varrho q_s = n \varrho_W q_s. \quad (64)$$

¹ STÄNDER, W.: Zur Bestimmung des Porenvolumens von Bodenproben aus großen Teufen. Glückauf Bd. 100 (1964) Heft 19.

Die Erstarrungstemperatur t_g des Grundwassers, die als Bezugstemperatur sämtlicher Berechnungen zum Gefrierproblem gewählt wurde, läßt sich nach einem Vorschlag von BOJKO ebenfalls berechnen¹. Die Messung dieses Wertes ist jedoch sehr einfach und deshalb in jedem Fall vorzuziehen.

III. Besonderheiten bei der technischen Durchführung von Gefrierverfahren.

1. Wahl der günstigsten Rohrabmessungen².

Der finanzielle Aufwand für ein Gefrierverfahren wird von den Energiekosten erheblich beeinflußt. Nach den Kältekompressoren haben die Umwälzpumpen für die Kühlsole den höchsten Energiebedarf, besonders im Schachtbau, wo mit verhältnismäßig langen Rohren gearbeitet wird. Es sollte deshalb darauf geachtet werden, daß die Soleumwälzung mit einem Minimum an Energieaufwand geschieht, d. h. der Druckverlust in den Gefrierrohren soll so klein wie möglich sein. Darüber hinaus soll zwecks verbesserten Wärmeübergangs zwischen Gebirge und Kühlsole die Strömung im Ringraum des Gefrierrohrs turbulent sein. Nun läßt sich nachweisen, daß die Reynoldszahl Re_i im inneren Rohr stets höher ist als die Reynoldszahl Re_a im Ringraum. Vernachlässigt man nämlich die geringfügige Änderung der Viskosität infolge des Temperaturanstiegs in Strömungsrichtung und beachtet, daß der Volumstrom in beiden Rohrsträngen gleich sein muß, so ist

$$\frac{Re_i}{Re_a} = \frac{D_i + d_m}{d_m} > 1. \quad (65)$$

Darin bedeuten D_i den Innendurchmesser des äußeren Rohrs und d_m den mittleren Durchmesser des Fallrohrs, dessen Wandstärke vernachlässigt wurde. Wird im Ringraum Turbulenz angestrebt, so muß zwangsläufig in beiden Rohrsträngen Turbulenz herrschen. Für diesen Fall lassen sich die Druckverluste Δp mit Hilfe des Blasiusschen Gesetzes für den Reibungsbeiwert angeben. Rechnet man wiederum mit einem mittleren Durchmesser d_m des Innenrohrs, so liefert die Bedingung $\frac{d \Delta p}{d d_m} = 0$ den Wert d_m , für welchen die Druckverluste ihren Kleinstwert erreichen. Man erhält

$$d_m = 0,646 D_i. \quad (66)$$

Eine entsprechende Betrachtung für laminare Strömung in beiden Rohrsträngen ergibt

$$d_m = 0,584 D_i. \quad (67)$$

Der dritte mögliche Fall, Turbulenz im Innenrohr und laminare Strömung im Ringraum ist in wärmetechnischer Hinsicht ungünstig, da der unerwünschte Wärmeübergang zwischen Innenrohr und Ringraum besser als der angestrebte Wärmeübergang von außen ist.

In den Ableitungen der Gl. (66) und (67) sind nur die Reibungsverluste berücksichtigt, nicht aber die Druckverluste an Rohrverbindungsmuffen, die Verengungen des Strömungsquerschnitts darstellen. Diese Verluste lassen sich mit Hilfe des Impulssatzes abschätzen. Sie spielen nur eine untergeordnete Rolle.

Die Bedeutung der Wahl optimaler Gefrierrohrquerschnitte sei an einem Beispiel aus dem Schachtbau gezeigt. Bis vor wenigen Jahren kam man infolge zu

¹ BOJKO, I. W.: Die Eigenschaften gefrorener, lockerer Gesteine. Šachtne Stroitel'stvo (1957) Nr. 10, S. 8–13. Moskau.

² STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1 S. 192.

enger Innenrohre und damit verbundener hoher Druckverluste über laminare Strömung im Ringraum nicht hinaus. Bei einem Durchfluß von $4,2 \text{ m}^3/\text{h}$ je Rohr und den Querschnitten $F_i = 13,2 \text{ cm}^2$ innen und $F_a = 102,5 \text{ cm}^2$ außen betragen die Druckverluste pro Meter Rohr rund $0,005 \text{ kp/cm}^2$. Wählt man das für laminare Strömung optimale Durchmesserverhältnis bei gleichem Innendurchmesser des Außenrohres von $D_i = 124 \text{ mm}$, so erhält man die Querschnitte $F_i = 35,3 \text{ cm}^2$ und $F_a = 73 \text{ cm}^2$. Der Druckverlust beträgt hierbei je Meter Rohr $0,00062 \text{ kp/cm}^2$, d. h. rund ein Achtel des früheren Wertes.

2. Überwachung des Verfahrensablaufs.

Neben der Betriebskontrolle der Kälteanlage ist eine ständige Überwachung des Kälteträgerkreislaufs und der Frostausbreitung erforderlich. Unter ungünstigen Umständen kann es vorkommen, daß ein Gefrierrohr an einer Muffenverbindung undicht wird oder infolge von thermischen Spannungen oder Gebirgsbewegungen reißt. Dann gelangt Kühlsole an den Frostkörper, wodurch dieser teilweise auftauen kann. Festigkeit und Dichtigkeit der Frostwand sind also, wie schon erwähnt, gefährdet. Es ist deshalb dafür zu sorgen, daß Undichtigkeiten im Gefrierrohrsystem frühzeitig erkannt werden. Durch Verwendung geeigneter kaltzäher Rohrwerkstoffe kann aber der Entstehung von Solerohrbrüchen entgegengewirkt werden.

Die Bildung des Frostkörpers wird durch Temperaturmessung überwacht. Hierzu werden in Meßrohren, die parallel zu den Gefrierrohren im Bereich des zu bildenden Frostkörpers niedergebracht werden, mehrere Meßhorizonte festgelegt, und zwar möglichst so, daß sie in Gebirgsschichten mit verschiedenen thermischen Eigenschaften liegen. Vor allem muß die Schicht, in der der langsamste Frostfortschritt zu erwarten ist, mit Temperaturmeßstellen versehen werden.

Ferner muß die Soletemperatur in den Gefrierrohren gemessen werden, um die gleichmäßige Wärmeaufnahme aller Rohre überwachen zu können und eine Grundlage zur Ermittlung der Rohrwandtemperatur zu erhalten. Die in den Berechnungen zur Frostausbreitung vorausgesetzte Kenntnis der Rohrwandtemperaturen entspricht meist nicht der Wirklichkeit. Vielmehr ist die Soletemperatur bei voller Leistung der Kältemaschine von der Wärmeaufnahme der Gefrierrohre abhängig und regelt sich selbsttätig. Der Wärmestrom an die Gefrierrohre nimmt im Verlauf des Gefrierens ab, weil der Hauptteil der abzuführenden Wärme, die Erstarrungswärme des Grundwassers, entsprechend dem Frostfortschritt einen immer größeren Weg bis zu den Gefrierrohren zurückzulegen hat. Dadurch nimmt das mittlere Temperaturgefälle im Frostkörper ab, und zwar trotz der durch den verringerten Wärmestrom bedingten Absenkung der Soletemperatur. Dieser Tatsache liegen die beschriebenen Iterationsverfahren zur Berechnung des Frostfortschritts nach dem Schließen zugrunde. Die für die Rechnung benötigten Rohrwandtemperaturen müssen also zunächst nach den gegebenen Umständen, d. h. dem Leistungsverhalten der Kälteanlage und der Bodenfangstemperatur, überschlägig bestimmt werden. Die Temperaturmessung in der ersten Phase des Gefrierens liefert Kontrollwerte, mit deren Hilfe die Überschlagsrechnung gegebenenfalls korrigiert werden kann.

Die Meßstellen zur Überwachung des Frostkörpers sollen nicht zu dicht an der durch die Gefrierrohrachsen gekennzeichneten Gefrierfläche liegen, sondern in einem Bereich, in dem die Isothermenflächen schon nahezu parallel zur Gefrierfläche verlaufen (Abb. 149). Dadurch erlaubt die Temperaturmessung Rückschlüsse auf die jeweilige Lage der Frostgrenzen, sofern man vereinfachend statioäre Temperaturverteilung und konstante Temperatur $t_{E,K} = Et_I$ in der Gefrier-

fläche annimmt. Beiderseits der Gefrierfläche ist mindestens je ein Meßrohr anzzuordnen.

Im strömenden Grundwasser ist die Möglichkeit rechnerischer Kontrolle des Gefrierverfahrens auf Grund weniger Meßdaten sehr beschränkt. Hier muß eine größere Anzahl von Meßrohren in verschiedenen Abständen von der Gefrierfläche angeordnet werden.

Im Schachtbau gefriert infolge der langen Abteufzeit der auszuhebende Querschnitt in größerer Teufe vollständig. Das Abteufen ist dann nur noch mit Hilfe von Sprengarbeiten wirtschaftlich möglich. Hierdurch entsteht eine Gefahr für die stoßempfindlichen Gefrierrohre. Eine Verzögerung des Frostfortschritts durch Drosselung der Kälteleistung ist nur begrenzt möglich, da ein Temperaturanstieg im Frostkörper dessen Festigkeit herabsetzt.

Mittels eines neuen Verfahrens können diese Schwierigkeiten beseitigt werden¹. Führt man nämlich während der Kälteabgabe der peripheren Gefrierrohre dem auszuhebenden Kern vom Zentrum aus Wärme bei konstanter Temperatur zu, so erhält man tatsächlich einen Frostmantel, der auf der Innenseite nur unbedeutende Aus- und Einbuchtungen aufweist². Wäre das Verhältnis der Wärmeleitzahlen für den gefrorenen und ungefrorenen Zustand für alle Schichten dasselbe, so würde sich zwischen Heizrohr und Gefrierkreis infolge des konstanten Temperaturgefälles überall das gleiche Temperaturfeld einstellen. In Wirklichkeit schwankt das Verhältnis der Wärmeleitzahlen, so daß auch die Temperaturfelder nicht ganz identisch sind, d. h. die Frostgrenze liegt in jeder Schicht auf einem anderen Radius. Die Unterschiede sind jedoch unerheblich, wie das folgende Beispiel zeigt:

Bei den Erdstoffen, deren Wärmeleitzahlen bisher gemessen wurden, zeigten sich Schwankungen des Verhältnisses der Wärmeleitzahlen im gefrorenen und ungefrorenen Zustand von maximal 19%. Die zugehörige Verschiebung der inneren Frostgrenze beträgt nur 2,7%. Die zentrale Wärmequelle des Schachts wird durch ein sattdampfbeheiztes Rohr dargestellt. Technisch leichter durchzuführen, wäre zwar eine elektrische Beheizung, aber sie wäre nicht kostspieliger, sondern würde wegen der unterschiedlichen Wärmeleitzahl der umgebenden Schichten die Forderung nach überall gleicher Temperatur nicht erfüllen, da sie auf ihrer gan-

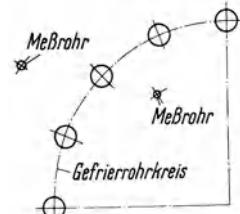
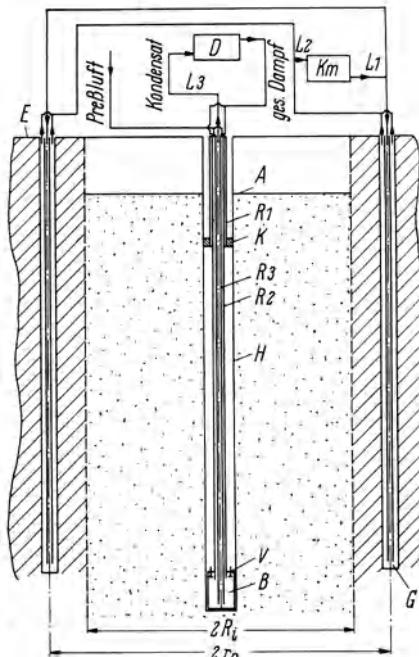


Abb. 149. Schema der Anordnung der Meßstellen.



zen Länge einen konstanten Wärmefluß abgibt. Die gesamte Dampfheizanlage besteht aus drei konzentrischen Rohren, zu denen als viertes die hohle Führungsstange des Kolbens, der das Heizrohr nach oben abschließt, hinzukommt (Abb. 150). Der Satt dampf wird durch das Führungsrohr des Kolbens in das Heizrohr eingeleitet und kondensiert nun an der Heizrohrwand. Das Kondensat fließt in einen Auffangbehälter, der mit Rückschlagventilen versehen ist. Dieser Behälter ist mit dem mittleren Rohr fest verbunden, durch das dem Auffangbehälter Preßluft zugeführt wird, welche das Kondensat durch das innen liegende Rohr in den Dampferzeuger hochdrückt. Der Verschlußkolben durchläuft das Heizrohr mit der Abteufgeschwindigkeit des Schachts. Der beheizte Teil des Rohrs darf erst einige Meter unter der Schachtsohle beginnen, damit Nebelbildung an der Arbeitsstelle vermieden wird. Der Abstand zwischen Arbeitssohle und Verschlußkolben läßt sich aus dieser Bedingung berechnen.

3. Hinweise zur Planung des Gefrierverfahrens.

Liegen die Abmessungen der Baugrube fest, so ist zunächst die erforderliche Frostwanddicke zu bestimmen. Diese richtet sich nach der Aufgabe der vorgeesehenen Frostwand. Soll in einem standfesten Gebirge lediglich ein Wasserabschluß hergestellt werden, so ist der größte auftretende hydrostatische Druck für die Planung maßgebend. In nicht standfestem Gebirge muß die Frostwand zusätzlich den Gebirgsdruck aufnehmen und ist dementsprechend stärker auszuführen, was hauptsächlich durch Vergrößerung der Dicke zu geschehen hat, aber auch durch Absenkung der Temperatur bis zu einem gewissen Grade möglich ist. Damit kann der Abstand der Gefrierrohre vom Rand der Baugrube festgelegt werden. Der gegenseitige Abstand der Rohre richtet sich nach den Bodenverhältnissen und nach der Zeit, die für die Herstellung der Frostwand zur Verfügung steht. Normalerweise ist in ruhendem Grundwasser ein Rohrabstand von etwa 1,5 m günstig. Kleinere Abstände, die bisher allgemein üblich waren, bringen zwar einen Zeitgewinn, der aber die höheren Bohr- und Gefrierrohrkosten meist nicht aufwiegt. Bei strömendem Grundwasser ist der Rohrabstand um einen Faktor zu kürzen, der von der Strömungsgeschwindigkeit abhängt. Die Abmessungen der Gefrierrohre und Innenrohre richten sich nach der Forderung minimaler Druckverluste bei turbulenter Strömung.

Unter Umständen ist es zweckmäßig, mit verschiedenen Rohrlängen zu arbeiten. Hat man beispielsweise an einem Gefrierschacht in der Oberflächenschicht besonders hohen Wassergehalt, so kann man zur Beschleunigung des Gefrierens zusätzliche Rohre in diese Schicht einbringen, indem man den Rohrabstand halbiert. Sofern es möglich ist, diese kürzeren Zusatzrohre in eine wasserundurchlässige Schicht einzubinden, kann mit dem Abteufen schon begonnen werden bevor in größerer Tiefe ein ausreichender Frostmantel gebildet ist. Damit läßt sich ein beträchtlicher Zeitgewinn erzielen.

Das gleiche Verfahren ist angebracht, wenn das Grundwasser in Oberflächennähe strömt, in tieferen Schichten aber in Ruhe ist. Hier würde bei überall gleicher Rohrzahl der Frostkörper im Bereich der Strömung mitunter wesentlich langsamer wachsen als in ruhendem Grundwasser, auch wenn hier wegen der größeren Tiefe höhere Umgebungstemperaturen herrschen sollten. Schließlich ist beim Gefrieren in strömendem Grundwasser auch zu erwägen, die Gefrierrohre in ungleichen Abständen niederzubringen, um einen möglichst gleichmäßigen Frostfortschritt an allen Rohren zu erzielen. Bei sehr tiefen Gefrierschächten kann es angebracht sein, die übliche Soledurchflußrichtung, nämlich Rücklauf durch das äußere Rohr, aufzugeben und die Sole durch das innere Rohr aufsteigen zu lassen.

Hierdurch hat man die tiefste Soletemperatur am oberen Ende der Rohre und erzielt hier den stärksten Wärmeentzug. Für kurze Gefrierrohre bringt die Umkehrung der Soledurchflußrichtung keinen Vorteil, weil die Erwärmung der Sole, sofern man turbulente Strömung und damit hohe Durchflußmenge hat, nur gering ist¹.

Die erforderliche Kälteleistung der Gefrieranlage ergibt sich aus den Wärme- und Festigkeitseigenschaften der zu gefrierenden Schichten und aus dem Zeitplan der Bauarbeiten. Bei Baubeginn wird in der Regel ein ganz bestimmter Froststand gefordert. Auf Grund der bis dahin verstrichenen Gefrierzeit kann die zur Abfuhr der Kristallisierungswärme des Frostkörpers benötigte Kälteleistung ermittelt werden. Dazu kommen die innere und äußere Abkühlungswärme, womit bei den üblichen Bodentemperaturen um 10 bis 12 °C insgesamt etwa das Zweifache der Kristallisierungswärme abzuführen ist. Dazu kommen noch die Verluste in den Verteil- und Sammelleitungen der Sole. Eine genauere Berechnung der benötigten Kälteleistung ist durch Auswertung des Temperaturfeldes unter Zugrundelegung der angestrebten Frostwanddicke möglich, aber überflüssig, da die Gefrieranlage nicht für ein einziges Bauvorhaben nach Maß beschafft wird. Es geht also nur darum zu prüfen, ob eine vorhandene Anlage ausreicht oder nicht.

Eine Gefrieranlage mit zu großer Kälteleistung kann ohne weiteres verwendet werden, denn sie regelt sich im Betrieb selbsttätig so ein, daß Wärmezufuhr und Kälteleistung im Gleichgewicht stehen. Die Leistung einer Kältemaschine ist nämlich um so größer, je höher die Verdampfungstemperatur und damit auch die Soletemperatur liegt. Eine Anpassung der Kältemaschinen an die erforderliche Leistung ist also nicht notwendig. Als Anhaltswert kann gelten, daß je Meter Gefrierschacht eine Kälteleistung von 4000 kcal/h bei –25 °C Verdampfungstemperatur eingesetzt werden muß. Entsprechend beträgt die Leistung je Meter Gefrierrohr etwa 100 bis 160 kcal/h.

Der nächste Schritt der Planung ist die Vorausbestimmung der Soletemperatur in Abhängigkeit von der Gefrierdauer. Da der Rohrabstand noch nicht endgültig festliegt, begnügt man sich mit der Schätzung von zwei Grenztemperaturen, zwischen denen der wahre Wert erwartungsgemäß verlaufen wird. Die Vorausberechnung des Gefrierverlaufs muß für beide Grenztemperaturen durchgeführt werden. Sind Schichten mit verschiedenen thermischen Eigenschaften zu gefrieren, so müssen in der Berechnung insbesondere die Gebiete mit besonders raschem und besonders langsamem Frostfortschritt berücksichtigt werden. Zunächst werden für die genannten Grenztemperaturen die Schließzeiten in Abhängigkeit vom Rohrabstand ermittelt. Dies ist die Grundlage für die Wahl der Rohrabstände bzw. Schließzeiten, wobei auch auf mögliche Bohrlochabweichungen Rücksicht zu nehmen ist. Nun kann der Frostfortschritt nach dem Schließen berechnet werden. Sollte sich dabei zeigen, daß die Gesamtgefrierdauer zu lang oder unnötig kurz ist, so lassen sich die Rohrabstände nochmals ändern und endgültig festlegen.

Nachdem die Zahl der Gefrierrohre bekannt ist, wird der notwendige Förderstrom der Solepumpen berechnet, wobei für den Ringraum der Gefrierrohre die Reynoldszahl größer als 3000 zu sein hat. Sofern bereits Solepumpen vorhanden sind, ist anhand ihrer Betriebskennlinie zu prüfen, ob sie das Erreichen turbulenter Strömung sichern und ob ihr Wirkungsgrad in der Nähe des Maximums liegt. Falls die Pumpen keine Turbulenz erzeugen können, sind unbedingt neue zu beschaffen. Bei ungünstigem Wirkungsgrad ist nachzurechnen, ob der Mehrverbrauch an Energie für die gesamte Betriebszeit teurer oder billiger als die Anschaffung neuer Solepumpen ist.

¹ STÄNDER, W.: Vgl. Fußnote 1 S. 192.

Diese kurzen Angaben zeigen, daß die Variationsmöglichkeiten des Gefrierverfahrens sehr vielfältig sind. Bei sorgfältiger Planung läßt sich also für jeden Anwendungsfall ein Höchstmaß an Sicherheit und Wirtschaftlichkeit erreichen.

C. Festigkeitsberechnungen und Festigkeitsverhalten.

I. Festigkeitsberechnung von Frostkörpern.

1. Schächte.

Für eine wirtschaftliche Anwendung des Gefrierverfahrens ist die Kenntnis über die erforderliche Frostwanddicke notwendig. Einerseits muß aus statischen Gründen eine Frostwand mit einer Mindestdicke hergestellt werden, andererseits soll die innere Frostgrenze möglichst nicht im auszuhebenden Kern liegen, da die Abteufarbeiten dadurch wesentlich erschwert werden und das Verfahren verteuern. Zusätzlich bedingt jeder zuviel gefrorene Kubikmeter Gebirge unnötige Energiekosten.

Der Frostzylinder muß der in den verschiedenen Schichten auftretenden horizontalen Belastung, bestehend aus Erd- und Wasserdruk, entsprechenden Widerstand leisten. Der Wasserdruk (p) nimmt linear mit der Wassertiefe (H) bis zur ersten wasserundurchlässigen Bodenschicht zu: $p = \gamma H$, wobei γ das spezifische Gewicht des Wassers bedeutet. Außerdem kann zwischen wasserundurchlässigen Schichten Wasser von hohem Druck auftreten. Man nimmt oft an^{1, 2}, daß der horizontale Erddruk ebenfalls mit der Tiefe linear ansteigt. In diesem Fall wird der Erddruk mit einem Zuschlag auf den Wasserdruk berücksichtigt.

Für begrenzte Teufen gibt STEINFELD eine spezielle Ableitung der Erddruckbelastung auf lotrechte Schachtwandungen an³. Unter der Annahme monolithischer Gleitkörper hat er die Coulombschen Erddruckberechnungen für die ebene Wand auf das räumliche Problem erweitert. Für einen kohäsionslosen Erdstoff ergab die Ermittlung der Druckkraft E auf zylindrische Schächte unter Berücksichtigung der entlastend wirkenden Ring- oder Tangentialverspannung folgende Gleichung:

$$E = \gamma h^2 \frac{1}{\tan \alpha} \left[\left(\frac{1}{6} \frac{h}{r} + \frac{1}{2} \tan \alpha \right) \frac{\tan(\alpha - \varrho)}{\tan \alpha} - \lambda_s \frac{1}{6} \frac{h}{r} \right] \left[\frac{t}{m \text{ Umfang}} \right]. \quad (68)$$

Der Beiwert λ_s stellt in dieser Formel das Verhältnis zwischen der waagrechten Tangentialspannung und der lotrechten Auflastspannung dar. Seine Größe hängt u. a. von der Lagerungsdichte und der Zusammendrückbarkeit des Erdstoffs ab, außerdem von Richtung und Größe der Bewegung des Gleitkörpers und somit auch von der Verformbarkeit der Schachtwand. Den Neigungswinkel α zwischen Gleitfläche (Mantellinie des Kegelstumpfs) und der Horizontalen erhält man durch eine Extremwertbetrachtung, wobei $dE/d\alpha$ gleich null gesetzt wird; hieraus ist der gesuchte Winkel α für den zu wählenden Beiwert λ_s , die Schachtabmessungen (h = Schachttiefe, r = äußerer Frostradius) und die Erdstoffwerte (γ = Raumgewicht, ϱ = Winkel der inneren Reibung) zu ermitteln.

Führt man diesen Rechenschritt für mehrere Schachtiefen aus, dann zeigt sich, daß der Gleitflächenwinkel mit der Tiefe zunimmt. Der Erddruk $e[t/m^2]$ erreicht in einer bestimmten, von der Geometrie des Schachts und dem Beiwert λ_s abhängigen Tiefe seinen Maximalwert, für den nach STEINFELD die Schachtwandung zu berechnen ist. Für zunehmende Tiefen nimmt STEINFELD an, daß konkav gekrümmte oder gebrochene Gleitflächen auftreten.

¹ FRITZSCHE, C. H.: Bergbaukunde, Bd. 2, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1962, S. 110.

² SICHARDT, W., u. P. CHARDABELLAS: Bautechn. Arch., Heft 9, Berlin 1953, S. 56.

³ STEINFELD, K.: Vorträge der Baugrundtagung 1958, Hamburg 1959, S. 111.

Zum Vergleich sei erwähnt, daß SCHOKLITSCH¹ auf Grund praktischer Erfahrungen aus dem Grundbau den Erddruck auf Schachtwandungen bis in 10 bis 14 m Tiefe nach der klassischen Erddrucktheorie als ebenes Problem berechnet und ihn dann für größere Tiefen als konstant annimmt.

Wegen Inhomogenität und Anisotropie des Gebirges muß allerdings die Belastung von Schicht zu Schicht unterschieden werden. Wenn nun die auf die Schachtwand wirkenden Belastungen unter Berücksichtigung aller Umstände und über die gesamte Tiefe ermittelt sind, kann man zur Berechnung der statisch erforderlichen Frostwanddicke schreiten. Die folgenden Berechnungsverfahren beziehen sich auf Kreisquerschnitte. Es hat sich in der Praxis gezeigt, daß immer mit Gefrierlochabweichungen zu rechnen ist. Diese Abweichungen können so groß sein, daß die Berechnung für den kreisförmigen Querschnitt nur noch eine sehr grobe Näherung darstellt.

Für die Ermittlung der benötigten Frostmantelstärke verwendete man in der ersten Zeit ausschließlich die für das dickwandige Rohr geltenden Formeln nach LAMÉ-CLAPEYRON².

Unter den Voraussetzungen, daß

- a) das Hookesche Gesetz gilt
- b) ein homogener Körper vorliegt
- c) die Außenbelastung gleichmäßig radial verteilt ist

erhält man für die Spannungen:

$$\sigma_t = \frac{a^2}{(a^2 - b^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p, \quad (69)$$

$$\sigma_r = \frac{a^2}{(a^2 - b^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p. \quad (70)$$

Hierin bedeuten: p : Radialbelastung, a : Außenradius des Gefrierschachts, b : Innenradius des Gefrierschachts r : Variable (Radius zwischen a und b), σ_t : tangentielle Spannung, σ_r : radiale Spannung.

Nach den Formeln ergibt sich qualitativ der in Abb. 151 dargestellte Spannungsverlauf über den Querschnitt.

Die Radial- und Tangentialspannungen sind Hauptspannungen, genau so wie die Vertikalspannung σ_z infolge Auflast.

Nach SICHARDT/CHARDABELLAS³ gilt:

$$\sigma_t > \sigma_z > \sigma_r.$$

Für $r = b$ erreicht die Tangentialspannung ihren größten Wert:

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{2a^2}{(a^2 - b^2)} p. \quad (71)$$

σ_t soll die zulässige Spannung nicht überschreiten. Ist der Ausbruchdurchmesser des Schachts bekannt, so erhält man den notwendigen Außendurchmesser des Frostzyinders:

$$a_n = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2p}{K}}}. \quad (72)$$

Darin ist K die Festigkeit an der Fließgrenze.

¹ SCHOKLITSCH, A.: Der Grundbau. Wien 1932, S. 380. — ² Siehe Fußnote 2 S. 210.

³ Vgl. Fußnote 2 S. 210.

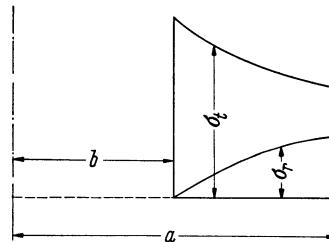


Abb. 151. Spannungsverlauf in einem dickwandigen Rohr (nach LAMÉ-CLAPEYRON).

Wie aus der Formel zu ersehen ist, wird a_n schon für $p = K/2$ unendlich groß. Nimmt man eine verhältnismäßig große „Druckfestigkeit“ von 100 kp/cm^2 an, so würde die Anwendung des Gefrierverfahrens schon in etwa 400 Metern Tiefe seine Grenze finden. Der tiefste Gefrierschacht, der bis heute abgeteuft wurde, war 915 m tief¹, ohne daß die Frostwanddicken unendlich groß gewesen wären.

Schon aus dieser Tatsache ergeben sich Zweifel an der Anwendbarkeit der Formel von LAMÉ-CLAPEYRON für Frostkörper. Zweifel ergeben sich auch daraus, daß der Frostkörper kein rein elastisches Verhalten aufweist und durch die inneren Temperaturunterschiede nicht homogen ist (s. Abschn. B). Wahrscheinlich bewegt man sich bei richtiger Anwendung der Formel auf der sicheren Seite; sie ist für Abschätzungen durchaus dienlich. Um jedoch wirtschaftlich bauen zu können, sind Formeln nötig, die das besondere mechanische Verhalten des Frostkörpers entsprechend berücksichtigen.

Die Widersprüche, die sich bei Anwendung der Lamé-Clapeyronschen Formel im Vergleich mit der Praxis des Gefrierschachtbaus ergaben, versuchte DOMKE² durch eine neue Formel zu beheben. Er nahm an, daß es sich beim gefrorenen Erdstoff um einen ideal elastisch-plastischen Stoff handelt, und er erhielt so im Bereich der größten Spannungen, also innen, eine plastische Zone, im äußeren Teil der Gefrierwand eine elastische Zone. Der Spannungsverlauf im elastischen Bereich folgt qualitativ den Lamé-Clapeyronschen Formeln.

Das Verhältnis der Spannungen, bei denen die plastische Verformung einsetzt, bestimmt DOMKE nach der Bruchhypothese von O. MOHR in der Form

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (73)$$

wobei $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ die Hauptspannungen bedeuten. Sie besagt, daß die größte Schubspannung, die ihrerseits nur von der Differenz der größten und kleinsten Hauptspannung abhängt, für den Bruch maßgebend ist. Die Schubfestigkeit kann

dann aus einaxialen Druckversuchen gewonnen werden. Mit $\sigma_3 = 0$ wird

$$\tau_{\max} = 1/2 \sigma_1 = 1/2 K. \quad (74)$$

Für den plastischen Teil des Frostkörpers mit den Hauptspannungen: $\sigma_t, \sigma_z, \sigma_r$ gilt dann

$$\sigma_t - \sigma_r = K. \quad (75)$$

Gewöhnlich wird $\sigma_z = \gamma H$ angenommen (γ ist das spezifische Gewicht des gefrorenen Erdstoffs). Ob dies in jedem Falle der Wirklichkeit entspricht muß bezweifelt

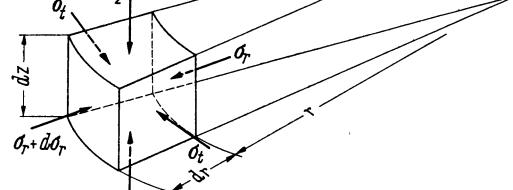


Abb. 152. Spannungen am Volumenelement eines zylindrischen Körpers.

werden. Denn einerseits können insbesondere bei bindigen Erdstoffen durch die Volumenvergrößerung bei der Eisbildung (Frostschiebung) zusätzliche Spannungen entstehen, die γH übersteigen. Andererseits ist es möglich, daß beim Abteufen infolge des Kriechens von Eis geringfügige Setzungen auftreten, wodurch die lotrechte Spannung abnimmt, da der darüberliegende Frostkörper durch seine Verzahnung mit dem ungefrorenen Gebirge teilweise von diesem getragen wird.

Durch eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem aus der Frostwand herausgeschnittenen Volumenelement (s. Abb. 152) läßt sich eine Differentialgleichung ermitteln.

¹ Bergbautechn. Bd. 8 (1958) S. 34. – ² DOMKE, D.: Glückauf Bd. 51 (1915) S. 1129 ff.

Aus

$$\sigma_r r d\varphi dz - \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi dz + 2 \sigma_t dr dz \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0, \quad (76)$$

wobei $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$ und das sich bei der Ausrechnung ergebende Glied $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$ vernachlässigt wird, ergibt sich

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r = \frac{d \sigma_r}{dr} r. \quad (77)$$

Durch Einsetzen der Bruchbedingung

$$K = \frac{d \sigma_r}{dr} r \quad (78)$$

und Integration mit der Randbedingung $r = b, \sigma_r = 0$ erhält man die Lösung für die Radialspannung im plastischen Bereich

$$\sigma_r = K \ln \frac{r}{b}. \quad (79)$$

Durch einfaches Einsetzen ergibt sich für die Tangentialspannung im plastischen Bereich

$$\sigma_t = K \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right). \quad (80)$$

Der Spannungsverlauf im elastischen Bereich nach LAMÉ-CLAPEYRON lässt sich funktionell darstellen:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad (81)$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2}, \quad (82)$$

wobei A und B unbekannte, noch zu bestimmende Konstanten sind. Dies wird möglich durch Einführen einer Veränderlichen s , die den Radius darstellt, der den elastischen vom plastischen Bereich im Frostkörper trennt. Bei $r = s$ sind die Tangentialspannungen bzw. Radialspannungen der beiden Bereiche identisch. Mit dieser Übergangsbedingung und der Randbedingung, daß für $r = a$ die Radialspannung $\sigma_r = p$ ist, lassen sich die Größen A, B, s bestimmen:

Für $r = s$ wird also gleichgesetzt:

$$A - \frac{B}{s^2} = K \ln \frac{s}{b}, \quad (83)$$

$$A + \frac{B}{s^2} = K \left(1 + \ln \frac{s}{b} \right). \quad (84)$$

Außerdem ist

$$p = A - \frac{B}{a^2}. \quad (85)$$

Daraus lässt sich die Beziehung zwischen K, p, s, b und a ermitteln.

$$\frac{p}{K} = \ln \frac{s}{b} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s^2}{a^2} \right), \quad (86)$$

und die Spannungen im elastischen Bereich ergeben sich zu

$$\sigma_r = p + \frac{1}{2} K s^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (87)$$

$$\sigma_t = p + \frac{1}{2} K s^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right). \quad (88)$$

Die Größen p , K , b werden im allgemeinen bekannt sein. Wird a festgelegt so läßt sich s ermitteln und weiterhin die vorhandenen Spannungen. Oder man legt den plastischen Bereich fest und erhält den Außenradius a .

DOMKE ermittelte unter der Annahme, daß die Grenzfläche beim geometrischen Mittel von a und b liegen soll ($s = \sqrt{a b}$) folgende Näherungsformel:

$$\frac{d}{b} = 0,29 \left(\frac{p}{K} \right) + 2,30 \left(\frac{p}{K} \right)^2. \quad (89)$$

Hierbei bedeutet d die Frostwanddicke ($d = a - b$).

DOMKE hat jene Form der Mohrschen Bruchhypothese zugrunde gelegt, die nur die Kohäsion berücksichtigt, da er den gefrorenen Boden als ideal elastisch-plastischen Stoff betrachtet.

TJUTJUNNIK¹ stellte auf Grund von Laboruntersuchungen fest, daß die Festigkeit von gefrorenen Erdstoffen nicht nur von Kohäsions-, sondern auch von Reibungskräften abhängt. Er führt deshalb die in der Bodenmechanik gebrauchte Form der Mohrschen Bruchhypothese in die Berechnung der Standsicherheit von Frostwänden ein:

$$\sigma_1 - \lambda \sigma_3 = \bar{\lambda}. \quad (90)$$

Hierbei bedeuten

$$\lambda = \tan^2 (45^\circ + \varrho/2), \quad (91)$$

$$\bar{\lambda} = 2k \tan (45^\circ + \varrho/2), \quad (92)$$

$$\sigma_3 = \sigma_r; \quad \sigma_1 = \sigma_t.$$

Führt man diese Bruchhypothese in die über eine Gleichgewichtsbetrachtung ermittelte Differentialgleichung (Gl. 77) ein, so ergibt sich

$$\bar{\lambda} + \sigma_r (\lambda - 1) = \frac{r d \sigma_r}{d r}. \quad (93)$$

Über die Randbedingung, daß für $r = b$ die Radialspannung $\sigma_r = 0$ sein muß, erhält man die Lösungen für den Spannungsverlauf im plastischen Bereich:

$$\sigma_r = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^{\lambda - 1} - 1 \right], \quad (94)$$

$$\sigma_t = \bar{\lambda} + \frac{\lambda \bar{\lambda}}{\lambda - 1} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^{\lambda - 1} - 1 \right]. \quad (95)$$

Wie DOMKE nimmt TJUTJUNNIK in der Frostwand einen Grenzradius $r = s$ an, bei dem der elastische (äußere) Bereich in den plastischen (inneren) Bereich übergeht. Wird die Rechnung wie bei DOMKE (Gl. 83–85) durchgeführt, so erhält man:

$$p = \frac{\bar{\lambda}}{2} + \frac{\bar{\lambda}}{2(\lambda - 1)} \left[\left(\frac{s}{b} \right)^{\lambda - 1} - 1 \right] (\lambda + 1) - \frac{\bar{\lambda} s^2}{2 a^2} \left(\frac{s}{b} \right)^{\lambda - 1}. \quad (96)$$

λ und $\bar{\lambda}$ sind Parameter, die das Festigkeitsverhalten des gefrorenen Erdstoffes charakterisieren und die durch Laborversuche zu ermitteln sind. Durch sie werden in der Berechnung alle Einflüsse, welche die Festigkeit des gefrorenen Erdstoffes bestimmen, wie Temperatur, Erdstoffart, Wassergehalt und Porenvolum usw., zusammengefaßt berücksichtigt. Sind die Größen p , b , a , bekannt, so läßt sich der Grenzradius s ermitteln oder man kann bei einer Vorgabe von s den erforderlichen Außenradius a berechnen. Die Frostwanddicke ergibt sich dann einfach durch $d = a - b$.

¹ TJUTJUNNIK, P. M.: Šachtne stroitel'stvo (1962) H. 3, S. 11, H. 4, S. 14.

Während DOMKE durch die Form seiner Gleichung die Größe d einführen konnte und einen Ausdruck erhielt, bei dem d mit den übrigen Größen (außer a) verknüpft ist, so ist dies bei TJUTJUNNIK nicht mehr möglich. TJUTJUNNIK beurteilt den Frostkörper deswegen nach der erforderlichen Standsicherheitshöhe¹. Er unterteilt den Gefrierschacht (s. Abb. 153) in drei Stufen:

Bis zu einer Grenzteufe H_{el} verhält sich der Frostkörper rein elastisch. Diese Höhe ergibt sich aus der Bedingung $s = b$ und der Annahme, daß der Druck linear mit H ansteigt:

$$p = H \gamma \lambda_H.$$

Setzt man dies in Gl. (96) ein, so erhält man

$$H_{el} = \frac{\bar{\lambda}}{2 \gamma \lambda_H} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right). \quad (97)$$

Ab einer gewissen Grenzteufe H_{pl} ist die gesamte Frostwand im plastischen Zustand. Dann ist $s = a$, und ein weiteres Abteufen ist nicht mehr möglich. Dies tritt ein bei

$$H_{pl} = \frac{\bar{\lambda}}{(\lambda - 1) \gamma \lambda_H} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda - 1} - 1 \right]. \quad (98)$$

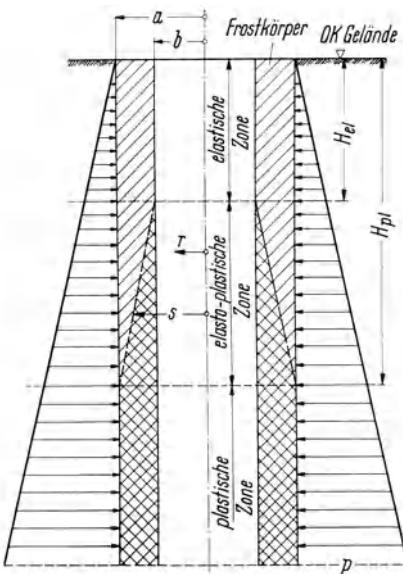


Abb. 153. Vertikaler, radialer Schnitt durch den Frostkörper.

2. Andere Bauten.

Während im Schachtbau vorwiegend Druckspannungen im gefrorenen Erdstoff wirken, wird bei anderen Anwendungen des Gefrierverfahrens der gefrorene Erdstoff auf Zug beansprucht, meist in Verbindung mit Biegung. Dies bringt weitere Schwierigkeiten mit sich, da das Fließverhalten hierbei ungünstiger wird. Verglichen mit der großen Anzahl von Schächten, die mit Hilfe des Gefrierverfahrens abgeteuft worden sind, ist das Gefrierverfahren selten bei anderen Bauten eingesetzt worden. Berechnungen der notwendigen Frostwandstärken sind bislang nicht bekannt geworden. Man hat sich wohl in den einzelnen Fällen auf die Erfahrung verlassen, nachdem man grobe Berechnungen mittels Formeln aus der Elastizitätstheorie aufgestellt hatte.

Bei den wenigen anderen Bauten handelte es sich zumeist um Stollen. Hier können zwei Verfahren unterschieden werden: Einmal wurden von der Erdoberfläche Gefrierrohre reihenweise in die Erde geschlagen und ein homogener Eis-Erdstoff-Block gefroren. In diesem Block wird dann der Stollen vortrieben (Abb. 154).

Das Verfahren hat die Nachteile, daß sehr viele Bohrlöcher notwendig sind und es nur für geringe Tiefen in Frage kommt. Zudem müssen die in den Stollen hineinragenden Kühlrohre im Verlaufe des Vortriebs gezogen werden, hierbei kann die Dichtheit des Frostkörpers gefährdet werden. Ist die Wandung an den Ulmen

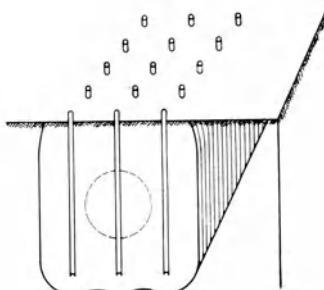


Abb. 154. Blockgefrieren für einen Stollen.

¹ TJUTJUNNIK, P. M.: Šachtnoe stroitel'stvo (1964) H. 1, S. 16.

dünn, so entstehen dort starke Biegemomente, da sich ein seitliches Gewölbe nicht ausbilden kann. Bei dickeren Wandungen wird die Belastung so ähnlich aussehen wie bei Stollen in standfestem Gebirge. Die Verformungen lassen sich grob abschätzen, zieht man die Messungen zu Rate, die HÄFELI¹ an verschiedenen Stollen in Gletschern gemacht hat.

Für alle vorkommenden Fälle befriedigende Berechnungsverfahren zu finden, dürfte schwierig sein, da die Größe der Belastung nur schwer abzuschätzen ist.

Bei größerer Tiefe kommt nur noch jenes Verfahren in Frage, bei dem von einem Schacht aus in horizontaler Richtung kreisförmig angeordnete Ge-

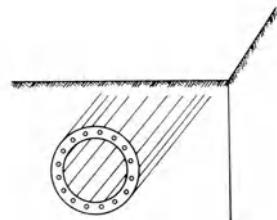


Abb. 155. Horizontale Gefrierothanordnung für einen Stollen.

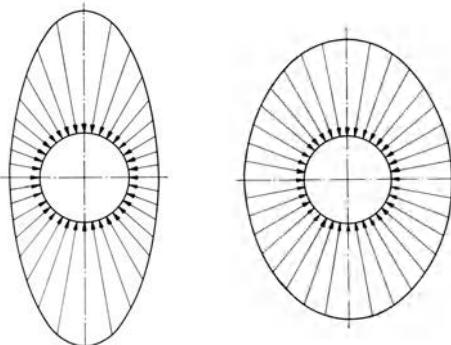


Abb. 156. Veränderung der Belastung eines Stollens mit der Zeit infolge Verformung der Froströhre.

frierrohre vorgetrieben werden. Man gefriert dann eine Röhre innerhalb deren weichem Kern der Vortrieb vonstatten geht (Abb. 155). Die statischen Verhältnisse sind dann etwas einfacher, da die lastaufnehmende Konstruktion — der Kreisring — ein verhältnismäßig einfaches Gebilde ist. Ebenso sind die Belastungen aus dem Grundbau und Bergbau zumindest bei gewissen Böden einigermaßen bekannt. Vorteilhaft wirkt sich die Plastizität des Eis-Erdkörpers aus. Bei weichem Ausbau stellt sich Auflockerungsdruck ein, der für Lockerböden gut zu ermitteln ist. Durch die sich einstellenden Verformungen vermag sich der Gefrierring an den Ulmen gegen das Erdreich abzustützen. Hierdurch werden die Biegemomente abgemindert, die Belastung, die anfänglich ellipsenförmig war, nähert sich der Radialbelastung wie bei Schächten, so daß u. U. Versuchs- und Meßergebnisse von dort übernommen werden können (s. Abb. 156).

Bei Anwendung des Gefrierverfahrens in anderen Bereichen, z. B. Baugrubenumschließungen, wird man erst noch Erfahrungen sammeln müssen. Die Ermittlung der Belastung dürfte in vielen Fällen einfach und eindeutig sein. Die Bemessung wird jedoch nach einem anderen Prinzip als bisher gewohnt vorgenommen werden müssen. Es wird in der Regel die Zeit maßgebend sein, in welcher die Schutzwand aus gefrorenem Erdreich ein gewisses Maß von Verformung überschreitet. Vorschläge, die in diese Richtung gehen, haben sowjetische Forscher schon für Schächte gemacht²⁻⁴.

II. Das mechanische Verhalten von Eis und gefrorenen Erdstoffen.

1. Allgemeines.

Für die Bemessung der Frostwand mittels der im vorangegangenen Abschnitt aufgeführten Gleichungen muß die Druckfestigkeit des Eis-Erdstoff-Gemischs

¹ HÄFELI, R.: J. Glaciol. Bd. 2, S. 94.

² KOKŠENEV, B. G.: Gornij Žurnal (1959) Nr. 2, S. 56.

³ VJALOV, S. S.: Šachtnoe stroitel'stvo (1963) Nr. 12, S. 6.

⁴ TJUTJUNNIK, P. M.: Šachtnoe stroitel'stvo (1964) Nr. 1, S. 16.

bekannt sein. Im folgenden soll nun eine kritische Betrachtung der experimentellen Untersuchungen des Festigkeitsverhaltens von Eis und gefrorenen Erdstoffen vorgenommen werden. Man findet in der Literatur viele Angaben über die sog. Druckfestigkeit dieser Stoffe. Sie hängt von zahlreichen physikalischen Größen ab, deshalb ist ein Vergleich der angegebenen Werte nicht ohne weiteres möglich. Eine wesentliche Einflußgröße bei der Versuchsdurchführung stellt die Geschwindigkeit der Lastaufbringung bzw. bei konstant gehaltener Spannung die Ermittlung der Zeit bis zum Bruch dar. Eis und gefrorene Erdstoffe besitzen in dem hier in Frage kommenden Temperaturbereich von 0° bis -40°C rheologische Eigenschaften, d. h. sie sind in der Lage, bei langandauernder Belastung langsam zu fließen und ihre Festigkeit zu verringern. Deshalb ist die Anwendung des Begriffs „Druckfestigkeit“ hier irreführend. Man kann nur von einer zeitlichen Festigkeit sprechen, um dieses Verhalten physikalisch richtig zu beschreiben. Es ist naheliegend, die für die Werkstoffprüfung der Metallindustrie festgelegten Begriffe zu übernehmen. Beim Bauen mit metallischen Werkstoffen muß berücksichtigt werden, daß im Bereich höherer Temperaturen ähnliche Kriecherscheinungen auftreten. Durch Belastungen unterhalb der Streckgrenze wird ein Kriechen des Werkstoffes hervorgerufen, das bis zum Bruch führt. STÜDEMANN¹ gibt folgende Begriffsbestimmungen an:

Kriechen und Kriechgeschwindigkeit. Unter Kriechen versteht man eine dauernde Dehnungszunahme des Werkstoffs bei konstanter Belastung. Die Kriechgeschwindigkeit ist demnach also die Kriechgröße (Dehnungszunahme) je Zeiteinheit.

Zeitstandfestigkeit. Die Zeitstandfestigkeit ist die konstante Spannung ($\sigma = P/F_0$), die nach einer bestimmten Zeit bei einer festgelegten Temperatur gerade noch zum Bruch des Probekörpers führt.

Dauerstandfestigkeit. Die Dauerstandfestigkeit ist die maximale konstante Spannung ($\sigma = P/F_0$), welcher der Werkstoff bei einer bestimmten Temperatur zeitlich unbegrenzt ausgesetzt werden kann.

Zeitstandkriechgrenze (auch Zeitkriechgrenze). Unter Zeitkriechgrenze versteht man die konstante Spannung ($\sigma = P/F_0$), die bei einer bestimmten Temperatur in einer vom Versuchsbeginn an gemessenen Zeit einen bestimmten Kriechbetrag bewirkt.

Kriechgeschwindigkeitsgrenze. Man versteht unter der Kriechgeschwindigkeitsgrenze die Spannung ($\sigma = P/F_0$), die innerhalb eines Zeitablaufes eine bestimmte Kriechgeschwindigkeit bei einer bestimmten Temperatur hervorruft. Dabei braucht der Zeitablauf nicht von null auszugehen.

Im Hinblick auf Metalle wird von HALLA² für die Dauerstandfestigkeit folgende Definition angegeben: „Unter Dauerstandfestigkeit σ_f versteht man die Belastungsgrenze, bei der unterhalb der Rekristallisationstemperatur eine anfänglich vorhandene Dehnung durch Verfestigung zum Stillstand kommt. Bei Stählen definiert man sie als jene Maximalspannung, für welche die Fließgeschwindigkeit $\Delta l/\Delta t = 10^{-4}/\text{h}$ in der 25. bis 35. Versuchsstunde wird.“

Die Höhe der Rekristallisationstemperatur T_R hängt in erster Linie vom Schmelzpunkt T_S des Metalls ab. Angenähert gilt für Metalle folgende Beziehung:

$$T_R \approx 0,42 T_S \quad (T_R \text{ und } T_S \text{ in } {}^{\circ}\text{ Kelvin}) .$$

Inwieweit diese Beziehung auch auf Eiskristalle angewendet werden kann, soll im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

¹ STÜDEMANN, H.: Werkstoffprüfung und Fehlerkontrolle in der Metallindustrie. München 1962, S. 64.

² HALLA, F.: Kristallchemie u. Kristallphysik metallischer Werkstoffe. Leipzig 1957, S. 337.

2. Eis.

Beim Gefrieren von Wasser entsteht bei Drücken unter 2000 ata auch bei tiefsten Temperaturen Eis mit hexagonalem Gitteraufbau. Der Aufbau eines Eiskristalls wird in einem Ausschnitt in Abb. 157 veranschaulicht.

Jedes Wassermolekül enthält neben dem Sauerstoffatom zwei Wasserstoffatome und zwei einsame Elektronenpaare; deshalb ist die Ausbildung von vier Wasserstoffbrücken möglich. Da jedes tetraedrische Molekül also nur vier nächste Nachbarn hat, ist die Struktur des Eises sehr aufgelockert und die Festigkeit dadurch gering. Ein Teil der Wasserstoffbrücken bleibt beim Schmelzen des Eises erhalten, so daß das spez. Gewicht des Wassers nur langsam zunimmt und bekanntlich erst

bei 4 °C sein Maximum erreicht. Erst oberhalb dieser Temperatur überwiegt die thermische Molekularbewegung gegenüber dem Abbau der tetraedrischen Aggregate, so daß das spez. Gewicht des Wassers mit steigender Temperatur abnimmt.

Auf Grund dieser ungewöhnlichen Eigenschaft des Dichteverhaltens kann man Vergleiche bezüglich des Festigkeitsverhaltens mit den Metallkristallen nicht unmittelbar vornehmen.

Wird die Frage nach der Dauerstandfestigkeit gestellt, so ist zu vermuten, daß es diese wahrscheinlich nicht gibt, zumindest

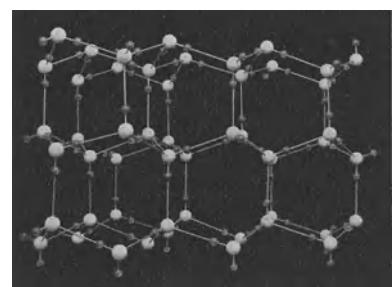


Abb. 157. Strukturmodell von Eis. (Große weiße Kugeln: Sauerstoffatome, kleine dunkle Kugeln: Wasserstoffatome.)

nicht im Bereich jener Temperaturen (bis etwa –40 °C), auf die das Eis bei Gefriergärden abgekühlt wird. Man kann jedoch, ohne einer endgültigen Klärung vorzugehen, ob es überhaupt eine Dauerstandfestigkeit gibt, sagen, daß sie für Metalle oberhalb der Rekristallisationstemperatur nicht existiert. Bei Eis kommt noch hinzu, daß die Gitterbindungen wegen des strukturartigen Charakters im Vergleich zum Aufbau der Metallkristalle einen Übergang zu amorphen Stoffen darstellen.

Besonders ausführlich hat sich GLEN¹ mit dem Gleitmechanismus unter Berücksichtigung des kristallographischen Aufbaus befaßt, wobei er streng zwischen den Untersuchungen von polykristallinem Eis einerseits und denen von Eis-Einkristallen andererseits unterscheidet.

Hergestellt wurden die polykristallinen Eisproben in zylindrischen Gefäßen, in die, nach Füllen mit Reif und Evakuierung, luftfreies, destilliertes und vorgekühltes Wasser gesaugt wurde. Mit diesen Eisproben, bestehend aus vielen Kristallen ungeordneter Orientierung, wurden Druckversuche durchgeführt. Bei –1,5 °C zeigte sich, daß Eis in Abhängigkeit von der Belastung keine konstante Zähigkeit besitzt. Weiterhin stellte GLEN fest, daß bei einem Druckbereich von 1,5 bis 10 kp/cm² der Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ der empirischen Beziehung

$$\dot{\epsilon} = k \sigma^n \quad (99)$$

gehorchte, wobei der konstante Wert $n = 4$ gemessen wurde.

Zu einem späteren Zeitpunkt hat GLEN die Untersuchungen auf einen größeren Temperaturbereich – zwischen Schmelzpunkt und –13 °C – erweitert. Es zeigte sich, daß Eis unter diesen Bedingungen ein Fließverhalten aufweist, das dem der Metalle bei hohen Temperaturen gleicht. Zunächst tritt ein Übergangskriechen mit

¹ GLEN, J. W.: J. Glaciol. Bd. 2 (1952) S. 111.

abnehmender Kriechgeschwindigkeit auf, das nach relativ kurzer Zeit in ein stationäres Kriechen übergeht. Im Hinblick auf nicht-kristalline Stoffe bezeichnet man dieses Kriechen als quasi-viskos. Bei höheren Spannungen wurde als drittes Kriechstadium ein tertiäres oder Beschleunigungskriechen festgestellt. Diese Beschleunigung führt GLEN auf Grund von Beobachtungen an Teilausschnitten der Eisprobe auf die Rekristallisation zurück. Unter Verwendung des von ANDRADE¹ entwickelten Exponentialgesetzes gibt GLEN die Beziehung zwischen der beobachteten minimalen Fließgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$, der aufgebrachten Spannung σ und der absoluten Temperatur T wie folgt an

$$\dot{\varepsilon} = B e^{-\frac{Q}{RT}} \sigma^n, \quad (100)$$

wobei R die Gaskonstante und B , n , Q Konstanten sind.

Mißt man die Spannung in bar (1 bar = 1,019 kp/cm²), die Fließrate $\dot{\varepsilon}$ in Jahren⁻¹, dann ergeben sich die Konstanten für polykristallines Eis zu $n = 3,2$; $Q \approx 32$ [kcal/Mol]; $B = 7 \cdot 10^{24}$.

Bei starker Verminderung der Belastung wurde ein Kriechen im Sinne einer Entspannung festgestellt. Dieses sogenannte Erholungskriechen wurde auch von

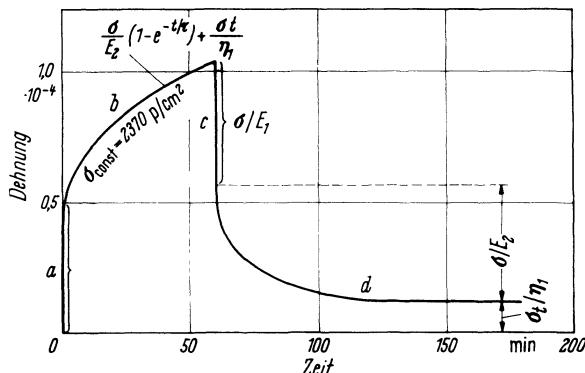


Abb. 158. Verformungs-Erholungskurve für eine Probe aus Schnee-Eis bei -5°C (nach H. JELLINEK/BRILL).

Kurvenzüge: a elastische Dehnung infolge Belastung; b zeitliche Dehnung infolge Belastung; c elastische Verkürzung infolge Entlastung; d zeitliche Verkürzung infolge Entlastung.

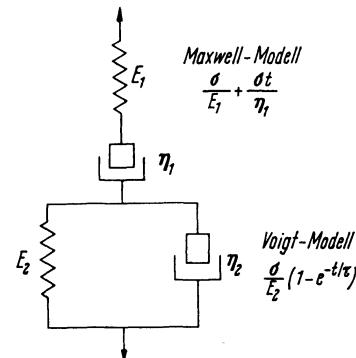


Abb. 159. Voigt- und Maxwellmodell zur Erläuterung des viskoelastischen Verhaltens von polykristallinem Eis (nach H. JELLINEK/BRILL).

JELLINEK/BRILL² bei Zugversuchen an polykristallinen Eisproben beobachtet. Eine typische Verformungs-Erholungskurve für polykristallines Eis – auch Schnee-Eis genannt – zeigt Abb. 158.

Diese experimentell ermittelten Ergebnisse können in erster Annäherung, wie Abb. 159 veranschaulicht, durch in Serie geschaltete Maxwell- und Voigtmodelle dargestellt werden. In den Abb. 158, 159 und der folgenden Gl. (101) bedeuten:

σ Spannung (Zug), E_1, E_2 Elastizitätsmoduln, η_1, η_2 Viskositätskoeffizienten, t Zeit, τ Verzögerungszeit $\tau = \frac{\eta_2}{E_2} \frac{1}{2(1+\mu)}$, μ Poissonsche Zahl

Somit ergibt sich für die Dehnung in Abhängigkeit von den viskoelastischen Eigenschaften:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma t}{\eta_1} + \frac{\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (101)$$

¹ Zit. nach GLEN, vgl. Fußnote 1, S. 218.

² JELLINEK, H. H. G., u. R. BRILL: Journ. Appl. Phys. Bd. 27 (1956) S. 1198.

Die Veröffentlichung von JELLINEK/BRILL enthält Angaben über die Elastizitätsmoduln, Viskositätskoeffizienten und Verzögerungszeiten in Abhängigkeit von der Temperatur bzw. der Belastung, die in Tab. 2 wiedergegeben sind.

Weitere Untersuchungen für die Ermittlung des Fließverhaltens von polykristallinem Eis sind aus der Glaziologie bekannt. Während man bis 1950 beim Studium des Fließens von Gletschern Eis als Flüssigkeit mit hoher, aber konstanter Newtonscher Viskosität behandelte, ging NYE¹ 1951 dazu über, Eis als einen ideal plastischen Stoff zu betrachten. Demnach verformt sich das Eis, wenn der Druck einen bestimmten Wert überschreitet, unbegrenzt. Diese Annahme wurde 1963 durch Geländebeobachtungen, durch Messungen der Geschwindigkeit und Dehnungsraten z. B. am Athabasca-Gletscher, Kanada, bestätigt.

Grundlegendere Erkenntnisse über den Gleitmechanismus können bei der Verformung von Eis-Einkristallen erlangt werden. Hierzu sei besonders auf die röntgenologischen Untersuchungen von GLEN/PERUTZ² hingewiesen. Die Züchtung der Einkristalle erfolgte in Gläsröhrchen, die in Wasser eingehängt wurden, wobei die Gefrierrichtung senkrecht zur Wasseroberfläche vorgegeben war. Durch Neigen der Gläsröhre konnte der Winkel zwischen Probenachse und der C-Achse des Kristalls beliebig variiert werden. Diese Versuchskörper wurden in der von OROWAN³ entwickelten Einkristallversuchsapparatur mechanisch untersucht. Bei

Tabelle 2. Parameter für die Verformung von polykristallinem Eis (nach JELLINEK/BRILL).

Proben-Nr.	σ p/cm ²	$E_1 \cdot 10^{-10}$ dyn/cm ²	$\eta_1 \cdot 10^{-14}$ poise	$E_2 \cdot 10^{-10}$ dyn/cm ²	$\eta_2 \cdot 10^{-13}$ poise	τ min
XI	2370	6,1	6,4	4,5	1,5	14,7
XIV	1910	7,7	6,1	7,5	2,5	14,7
XII	1250	7,0	5,5	7,7	2,6	14,7
XXXVIII	1910	5,9	2,1	6,5	0,9	5,9
XX	1860	2,7	2,1	3,1	1,3	18,2
XV	1275	2,0	1,8	8,4	1,7	8,5
XVI	1245	6,1	1,8	5,8	1,3	10,0
XXI	650	3,4	2,4	5,8	2,0	14,7
				-5 °C		
XXXVII	2430	4,5	4,3	7,7	2,6	14,7
XXXV	2390	3,7	4,0	7,6	2,6	14,7
XXXVI	1830	3,8	3,1	9,0	3,0	14,7
				-10 °C		
XXXI	2450	5,6	5,4	12,7	1,7	5,9
XXVIII	2370	5,6	7,0	15,5	5,3	14,7
XXIV	1920	4,2	5,1	15,0	2,0	5,9
XXIX	1830	6,2	7,2	10,6	2,1	8,5
XXX	1240	6,1	6,6	4,3	1,5	14,7
XXIII	1230	4,3	9,3

einer Dehnung, die ein mehrfaches der ursprünglichen Länge der Kristalle betrug, zeigte sich, daß die Abgleitung ausschließlich auf der Basisebene erfolgte. Über die Gleitrichtung konnte keine eindeutige Aussage gemacht werden. Die Vermutung liegt nahe, daß in der Nähe des Schmelzpunktes die Kristalle in jeder Richtung gleiten können. Die Laue-Aufnahmen der undeformierten Kristalle zeigten scharfe Röntgenreflexe, während nach der Verformung Streifen auftraten, die später in einzelne Flecke aufbrachen. Aus diesen Beobachtungen schloß GLEN,

¹ NYE, J. F.: Proc. Roy. Soc., Series A, Bd. 207 (1951) S. 554.

² GLEN, J. W., u. M. F. PERUTZ: J. Glaciol. Bd. 2 (1954) Nr. 16, S. 397.

³ Zit. nach GLEN/PERUTZ, vgl. Fußnote 2.

daß sich die Kristalle zunächst verformten und erst zu einem späteren Zeitpunkt in eine Anzahl kleinerer Kristalle mit verschiedener Orientierung verwandelten.

Weitere Untersuchungen an Eis-Einkristallen wurden von STEINEMANN¹ durchgeführt, der Eisproben in der Bausch-Apparatur einer reinen Scherbeanspruchung aussetzte. Es zeigte sich, daß bei Dauerbeanspruchung folgende Verformungsstadien existieren, die beide durch eine Beziehung für die Schergeschwindigkeit γ dargestellt werden können

$$\dot{\gamma} = K \tau^n. \quad (102)$$

Für das erste Fließstadium vom unverformten Kristall bis zu einer Abgleitung von 10 bis 20% wird $n = 2,3$ bis 4, während im zweiten Stadium bei einer Abgleitung über 10 bis 20% $n = 1,3$ bis 1,8 eingesetzt wird.

STEINEMANN stellte ebenfalls fest, daß die Abgleitung in der Basisebene erfolgt, wobei allerdings eine definierte Gleitrichtung nicht angegeben werden konnte.

RIGSBY² verformte Eiskristalle unter hydrostatischen Drücken bis zu 350 atü und fand, daß die Scherverzerrungsgeschwindigkeit bei gleichbleibender Temperatur mit zunehmendem Druck ansteigt. Hält man aber die Differenz zwischen Eis- und Schmelztemperatur konstant, dann ist die Geschwindigkeit praktisch vom Druck unabhängig.

Um einen Überblick über die allgemeinen mechanischen Größen von Eis zu erhalten, seien hier noch folgende Angaben³ wiedergegeben:

a) Ritzhärte:

Temp. °C	n. d. Mohsschen Skala
0	2
-15	2-3
-30	3-4
-40	4

c) Elastizitätsmodul: E (dyn/cm²)

Temp. °C	$E \cdot 10^{-10}$
-9	9,29
-10	9,48
-15	9,8 (polykrist. Eis)
-30	10,2
-35	10,9

b) Vickershärte: H_v (kp/mm²);
Belastung 1 kp

Temp. °C	Vickershärte Belastungsdauer	
	2 sec	120 sec
-0,25	1,8	0,8
-4	3,6	1,4
-20	6	2,6

d) Torsionsmodul: F (dyn/cm²)

Temp. °C	$F \cdot 10^{-10}$
-1,8	1,09
-5,5	1,27
-41,5	1,48
-106,5	1,61
-185,5	1,68

e) Poissonsche Zahl: $\mu_{\text{Mittel}} = 0,33$ für polykristallines Eis bei -15 °C.

f) Zug- und Druckfestigkeit:

Zugfestigkeit bei -8 °C und einer mittleren Belastungsgeschwindigkeit von 0,1 kp/cm²sec: Mittelwert 17 kp/cm², höchst. Wert 24,8 kp/cm², niedrigst. Wert 14,8 kp/cm².

Druckfestigkeit bei -8 °C und einer mittleren Belastungsgeschwindigkeit von 3 kp/cm²sec: Mittelwert 43 kp/cm², höchst. Wert 54,4 kp/cm², niedrigst. Wert 34,0 kp/cm².

¹ STEINEMANN, S.: J. Glaciol. Bd. 2, S. 404. - ² RIGSBY, G. P.: J. Glaciol 1958 S. 273.

³ Gmelins Handbuch d. anorg. Chemie, Sauerstoff, 1963, S. 1444ff.

g) Scherfestigkeit: je nach Belastungsgeschwindigkeit: 5 bis 8 kp/cm².
 h) Viskosität (quasi-viskoses Verhalten): n in cP: $\eta = 1,7 \cdot 10^{11}$ (bei $-1,0$ °C) bis $2,1 \cdot 10^{15}$ (bei -30 °C).

3. Das mechanische Verhalten von gefrorenen Erdstoffen.

Wie schon in Abschn. 1 erwähnt, ist für die praktische Anwendung des Gefrierverfahrens die Kenntnis der Festigkeit und des rheologischen Verhaltens des Eis-Erdstoffs von großer Wichtigkeit. Der gefrorene Erdstoff enthält neben Erdstoff und Eis auch gelöste und ungelöste Gase, flüssiges Wasser und gelöste Mineralstoffe (Salze).

Während das Verhalten von Eis noch von verhältnismäßig wenigen Größen bestimmt wird, kommt beim gefrorenen Erdstoff, als heterogenem Stoff, eine beträchtliche Zahl weiterer Einflußgrößen hinzu, die in ihrer Veränderlichkeit sein Verhalten entscheidend bestimmen. Eine klare Gliederung in der Erklärung dieser Einflüsse ist nicht zu finden, da die einzelnen Größen stark voneinander abhängen. Das erklärt die Schwierigkeiten, die sich einer umfassenden Darstellung des Verhaltens von gefrorenem Erdstoff entgegenstellen. Dies schlägt sich auch in der Literatur nieder. Man findet zwar eine Menge Veröffentlichungen über die Eigenschaften gefrorener Erdstoffe, doch sind die Angaben in vielen Fällen nicht zu gebrauchen. Bei älteren Berichten wird meist die Zeit außer acht gelassen, es wird also eine entscheidende Einflußgröße vergessen. Bei anderen Berichten werden sonstige Einflußgrößen nicht angegeben und zumeist werden nur empirische Formeln aus Versuchsreihen gegeben, bei denen nur ein Parameter verändert wurde. Diese Versuche können allenfalls einen qualitativen Überblick geben, jedoch keinen quantitativen. Die wenigen brauchbaren Veröffentlichungen erschienen zumeist in der UdSSR, wo die Vielschichtigkeit und Komplexität des Verhaltens des Eis-Erdstoffs am besten begriffen wird. Der Grund mag wohl darin liegen, daß man sich dort mit dem ewig gefrorenen Boden Sibiriens schon seit langer Zeit auseinandersetzen mußte.

Die augenfälligste und wichtigste Einflußgröße ist die Temperatur. Einmal steigt mit fallender Temperatur die Festigkeit des Eises, das als Bindemittel dient und von dem die Festigkeit des gefrorenen Erdstoffs mehr abhängt als von der Druckfestigkeit der einzelnen Erdstoffkörner (wohl aber hängt die Festigkeit von Kornform und Korngröße ab). Hinzu kommt noch ein weiterer Einfluß: Nicht das gesamte Wasser ist im gefrorenen Erdstoff zu Eis erstarrt, ein Teil bleibt flüssig und dieser Teil ist temperaturabhängig. Zwei Gründe sind hierfür maßgebend. Einmal verursacht der Salzgehalt eine Gefrierpunkterniedrigung. In den meisten Fällen wird bei mineralarmem Wasser gearbeitet; hierbei kann der geringe Salzgehalt vernachlässigt werden. Bei stark salzigem Wasser wurden noch wenige Untersuchungen gemacht, obwohl schon eine große Anzahl von Schächten in salzhaltigem Grundwasser abgeteuft wurde. Zum anderen spielen molekulare Kräfte zwischen Wasser und Erdstoff eine Rolle. Bei reinen Sanden und Kiesen, also bei Stoffen mit geringer spezifischer Kornoberfläche ist der Anteil ungefrorenen Wassers gering. Bei bindigen Böden, also Stoffen mit großer spezifischer Oberfläche, ist der Anteil ungefrorenen Wassers wesentlich höher.

Bei Cytovič^{1, 2} findet man das folgende Schaubild (Abb. 160), das den Prozentsatz ungefrorenen Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur für verschiedene Bodenarten zeigt.

¹ CYTOVIČ, N. A.: Izv. AN SSSR. ser. geogr. (1945) Nr. 5.

² CYTOVIČ, N. A.: Izv. AN SSSR. ser. geolog. (1947) Nr. 3.

Die Tatsache, daß sich mit fallender Temperatur mehr Eis bildet, daß also der Anteil des „Bindemittels“ steigt, zeigt, daß die Versuchsergebnisse von gefrorenen Erdstoffen nicht unmittelbar mit den Ergebnissen von Versuchen an reinem Eis verglichen werden können. Es lassen sich nämlich folgende Überlegungen anstellen: Gegenüber einem vergleichbaren Versuch mit Eis wird die Festigkeit eines gefrorenen Erdstoffs mit fallender Temperatur stärker steigen, da sich mehr Eis an der Spannungsaufnahme beteiligt. Die Kriechgeschwindigkeit wird (bei konstanter Last) schwächer fallen, da die Spannung in den Eisteilchen infolge der wachsenden Eismenge geringer wird.

Abb. 161 zeigt die Festigkeit verschiedener gefrorener Erdstoffe in Abhängigkeit von der Temperatur. Man kann deutlich erkennen, daß Stoffe mit höherem Gehalt an ungefrorenem Wasser wesentlich geringere Festigkeit bei Temperaturen nahe 0°C aufweisen, jedoch im Vergleich zu Sand eine stärkere Tendenz in der Vergrößerung der Festigkeit zeigen.

Diese Festigkeitsangaben sind jedoch nicht als Festwerte zu betrachten und mit Vorsicht zu gebrauchen, wie Abb. 162 veranschaulicht. Dort sind als Beispiel

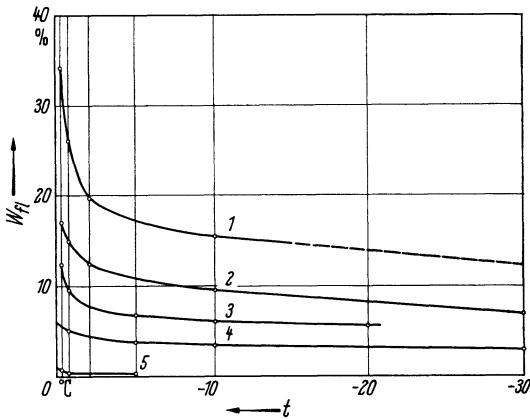


Abb. 160. Anteil ungefrorenen Wassers (%) bei verschiedenen Bodenarten (nach CYTOVIĆ).

1 Ton; 2 Oberflächenton; 3 lehmiger Boden; 4 sandiger Ton;
5 Sand.

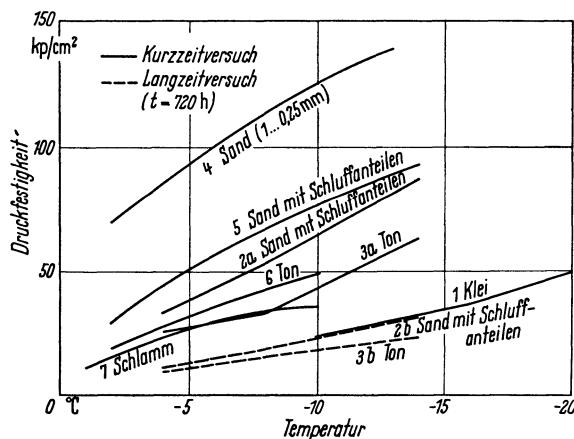


Abb. 161. Abhängigkeit der Druckfestigkeit verschiedener Erdstoffarten von der Temperatur.

1 SICHARDT, W., u. P. CHARDABELLAS: Bautechn.-Arch., H. 9, 1953, S. 37; 2, 3 TJUTJUNNIK, P. M.: Šachtneoe Stroitel'stvo, H. 4, 1962, S. 14; 4—7 CYTOVIĆ, N. A., u. M. I. SUMGIN: Osnovanija mechaniki merzlych gruntov 1937.

auf Grund von Angaben verschiedener Autoren Druckfestigkeiten von gefrorenem wassergesättigtem Sand in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Es ist deutlich zu sehen, was zuvor schon erwähnt wurde: zahlreiche Angaben, die so stark voneinander abweichen, daß sie mit zufälliger Streuung der Versuchsergebnisse nicht mehr zu erklären sind. Verschiedene Belastungsdauer kann eine Er-

klärung sein. (Bei Versuchen, zu denen keine Zeitangabe vorliegt, wurde angenommen, daß es sich um Kurzzeitversuche handelt.) Ein weiterer Grund für die Verschiedenheit der Versuchsergebnisse wird in der Probenkörperherstellung und der

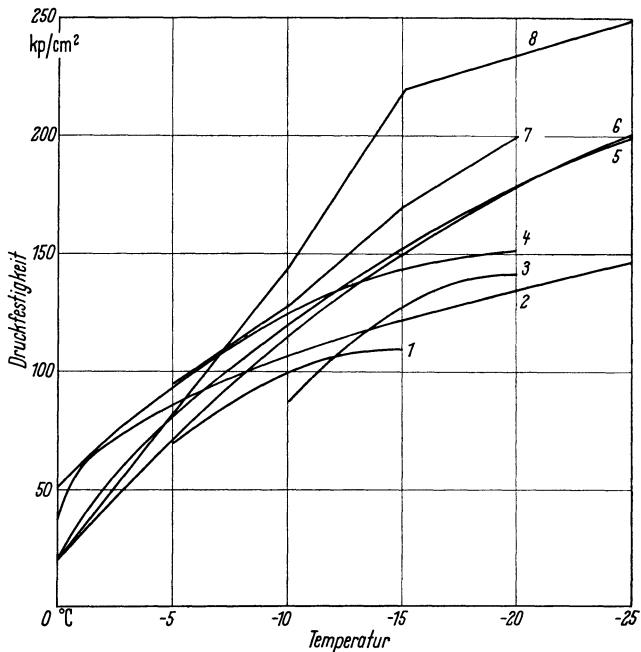


Abb. 162. Abhängigkeit der Druckfestigkeit von der Temperatur für Sand.

1 KOKSENEV, B. G.: Gornij Žurnal, Nr. 2, 1959, S. 56; 2 TJUTJUNNIK, P. M.: Šachtnoe Stroitel'stvo, H. 4, 1962, S. 14; 3 SICHARDT, W., u. P. CHARDABELLAS: Bautechn.-Arch. H. 9, 1953, S. 37; 4 CYTOVIĆ, N. A., u. M. I. SUMGIN: Osnovanija mehanike merzlych gruntov 1937; 5 FRITZSCHE, C. H.: Bergbaukunde 1962, S. 109; 6 GALANKA, J., u. J. STERKOVICZ: Przeglad Górnictwa, Nr. 7/8, 1958, S. 325; 7 BIQUET, M.: Ann. des Mines de Belgique, Bd. 12, 1953, S. 558; 8 AÜSSENDORF, C.: Tunnelbau, 1955, S. 271.

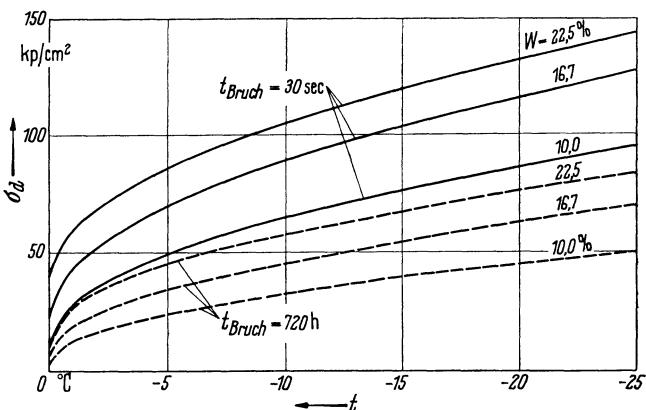


Abb. 163. Vergleich der Druckfestigkeit von Sand für verschiedene Wassergehalte in Abhängigkeit von der Temperatur (nach TJUTJUNNIK).

Probenkörpergröße zu suchen sein, denn neben der Temperatur haben auch Kornform, Lagerungsdichte oder Porenvolum, sowie der Wassergehalt Einfluß auf die Festigkeit. In Abb. 163 ist die Druckfestigkeit eines gefrorenen Mittelsandes

nach Versuchen von TJUTJUNNIK¹ in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Wassergehalten dargestellt. In der gleichen Abbildung werden außerdem Kurven mit unterschiedlicher Belastungsdauer bis zum Bruch ($t = 30$ sec

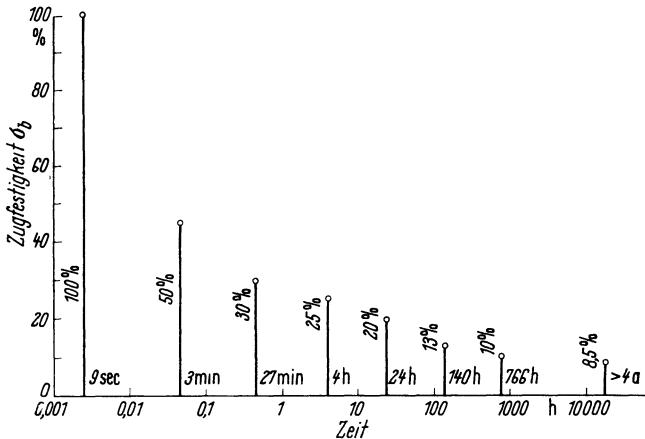


Abb. 164. Abnahme der Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Belastungszeit (nach VJALOV).

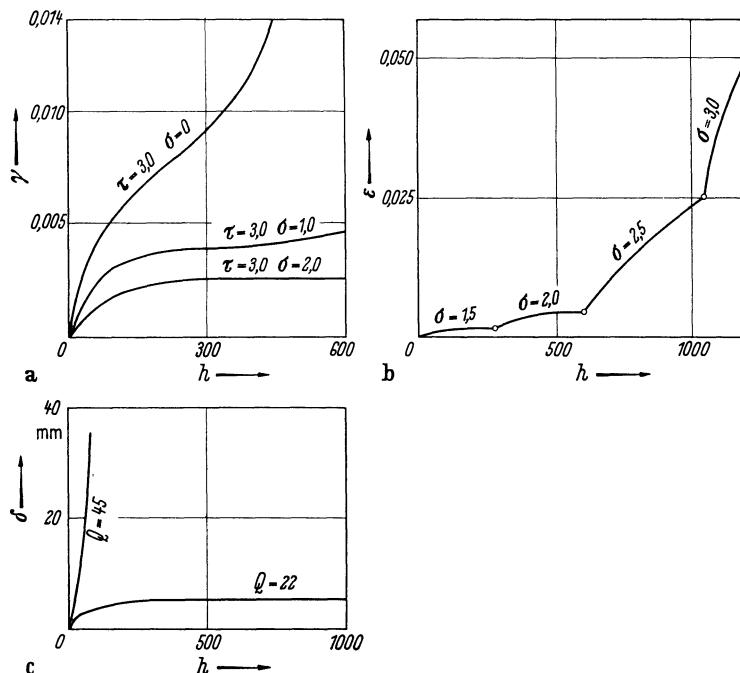


Abb. 165 a-c. Kriechkurven von gefrorenem Sand bei verschiedener Beanspruchung: $t = -3,5$ °C (nach VORTROVSKIJ).

a) Schub mit verschiedener Normalkraft; b) Zug bei veränderten Spannungen; c) Biegung von Balken (10 × 10 cm, Spannweite 100 cm).

bzw. 720 h) einander gegenübergestellt. Wie bei Eis nimmt bei langdauernder Belastung die Bruchfestigkeit ab. Sowjetische Forscher berichten von Versuchen, aus denen sie die Existenz einer Dauerstandfestigkeit folgern. VJALOV² gibt für

¹ TJUTJUNNIK, P. M.: Vgl. Fußnote 1, S. 214.

² VJALOV, S. S.: Dokl. Ak. Nauk SSSR Bd. 104 (1955), S. 850.

Tabelle 3. Kennwerte k (Kohäsion) und ϱ (Reibungswinkel) gefrorener Böden (nach TJUTJUNNIK).

Temperatur in °C	Mittelsand						Ton											
	t = 30 sec			t = 720 Std.			t = 30 sec			t = 720 Std.								
	k	ϱ	k	k	ϱ	k	k	ϱ	k	k	ϱ	k						
-4	6,5 13 17,9	0,28 0,57 0,78	8,2 17,3 22	28° 30' 25° 00' 23° 00'	3,7 8,5 11,1	28° 17' 26° 48' 25° 48'	6,8 12,6 20,8	0,25 0,47 0,7	3,9 7 10,8	25° 12' 26° 12' 26° 36'	1,3 2,5 4	26° 36' 27° 30' 26° 36'	9,3 12,6 22,2	0,31 0,42 0,74	4,3 6,1 10,1	24° 00' 24° 12' 16° 48'	1,4 1,8 3,1	23° 36' 22° 00' 16° 30'
-8	5,8 12 23	0,25 0,52 1	11,2 20 31,2	29° 10' 25° 54' 21° 00'	5 9,7 17,1	28° 49' 25° 52' 21° 38'	7,2 13,5 20,9	0,24 0,5 0,78	6,1 11,5 18	28° 30' 24° 00' 23° 40'	2,5 5 6,5	29° 20' 25° 12' 25° 48'	9,2 12,8 17,3	0,31 0,43 0,58	8 11,2 13,8	15° 12' 13° 49' 15° 18'	2,5 3,9 4,8	12° 50' 12° 00' 14° 12'
-14	6,5 16,7 22,5	0,28 0,73 0,98	14,8 32,6 40,5	27° 00' 22° 12' 19° 46'	7,3 16,4 21,5	27° 00' 22° 00' 20° 30'	7,5 15,6 21,9	0,28 0,58 0,81	10,5 22,7 30,9	23° 24' 19° 48' 16° 12'	4,5 8,5 11,2	24° 18' 20° 42' 17° 48'	14,2 20,4 28	0,48 0,68 0,93	17,8 22,8 25,8	18° 48' 12° 48' 13° 24'	5,8 8,2 9,9	18° 54' 12° 48' 13° 24'

Zugversuche eine Dauerstandfestigkeit von 0,085 σ_0 (σ_0 ist die Kurzzeitfestigkeit) an. Bei 0,1 σ_0 erfolgte der Bruch noch nach 766 Stunden, bei 0,085 σ_0 brach der Probekörper selbst nach einer Belastungszeit von 4 Jahren noch nicht (Abb. 164).

TJUTJUNNIK, der reichhaltige und vollständige Versuchsergebnisse veröffentlicht hat¹, beschränkt sich auf die Angabe von Bruchfestigkeiten nach 720 Stunden Belastungsdauer, ohne auf das Problem der Dauerstandfestigkeit näher einzugehen. 720 Stunden wählt er deshalb, da ihm im Hinblick auf den Schachtbau (Zeit bis zum Einbringen des endgültigen Ausbaus) diese Zeit für ausreichend lang erscheint.

Bei VOITKOVSKIJ² findet man für die Dehnung bzw. Durchbiegung bei Zug und Biegung in Abhängigkeit von der Dauer der Belastung Q folgende Schaubilder (Abb. 165), wobei es sich um gefrorene Sande handelt.

VOITKOVSKIJ erklärt das Verhalten von gefrorenen Erdstoffen so, daß nach einer gewissen Zeit (Dehnung) sich die Körner berühren. Es findet im gefrorenen Erdstoff eine dauernde Lastumlagerung statt, bis die gesamte Last vom Korngerüst übertragen wird und das Eis weitgehend spannungsfrei ist. Bei geringen Spannungen verformt sich so dann der Körper nicht mehr. Es ist einleuchtend, daß sich bei dieser Erklärung eine Dauerstandfestigkeit einstellt. Bei Zugbeanspruchung versagt

¹ TJUTJUNNIK, P. M.: Vgl. Fußnote 1 S. 214.

² VOITKOVSKIJ, K. F.: Dokl. Ak. Nauk SSSR Bd. 135 (1960) No. 5, S. 1079.

diese Erklärung, denn hier wird die gesamte Spannung nur durch Eis aufgenommen. Zwar hat VJALOV auf Grund seiner Versuche auf eine Dauerstandfestigkeit geschlossen; indes wurde eine solche bei Eis noch nicht festgestellt und es ist anzunehmen, daß sich bei den Versuchen derartig geringe Dehnungsgeschwindigkeiten einstellten, die praktisch belanglos sind.

Die von VOITKOVSKIJ gegebene Erklärung des Festigkeitsmechanismus wird bestätigt durch die von TJUTJUNNIK und NEUBER/WOLTERS ausgeführten Versuche.

TJUTJUNNIK¹ ermittelte über Scher- und Druckversuche Kohäsion und Reibungswinkel im Sinne der Mohrschen Bruchtheorie, wobei er die Einhüllende der Spannungskreise durch eine Gerade ersetzt. In Tab. 3 sind für Mittelsand, schluffigen Sand und Lehm die Kennwerte k und ϱ für verschiedene Feuchtigkeitsgrade und Belastungszeiten in Abhängigkeit von der Temperatur wiedergegeben.

NEUBER/WOLTERS untersuchten im Gegensatz zu TJUTJUNNIK (der seine Proben im Labor herstellte) Proben, die ungestört dem Erdreich entnommen worden waren, in einem Dreiaxialgerät. Hierdurch berücksichtigen sie die Lagerstättenbedingungen. Außerdem untersuchten sie die Proben in verschiedener Richtung zur geologischen Bildung. Für einen Mittel- und Grobsand geben sie eine durch eine Gerade angenäherte Hüllkurve der Mohrschen Spannungskreise an¹:

- a) $t = -16^\circ\text{C}$ $k = 40,3 \text{ kp/cm}^2$, $\varrho = 31,6^\circ$,
- b) $t = -5,5^\circ\text{C}$ $k = 24 \text{ kp/cm}^2$, $\varrho = 30,1^\circ$.

Vergleicht man diese Werte mit den Angaben von TJUTJUNNIK bei einer Belastungsdauer von 30 sec:

- a) $t = -14^\circ\text{C}$ $k = 40,5 \text{ kp/cm}^2$, $\varrho = 19,8^\circ$,
- b) $t = -4,0^\circ\text{C}$ $k = 22 \text{ kp/cm}^2$, $\varrho = 23^\circ$,

dann zeigt sich, daß etwa dieselbe Kohäsion ermittelt wurde, die Reibungswinkel jedoch erheblich voneinander abweichen. Der Grund liegt wohl darin, daß durch den dichten Kornaufbau die Last praktisch nur durch das Korngerüst getragen wurde und sich der Reibungswinkel voll auswirken konnte. Der Reibungswinkel für ungefrorene Sande bewegt sich zwischen 30° und 35° .

Zusätzlich stellten NEUBER/WOLTERS fest, daß auch die Richtung der Belastung bei gewachsenem Boden einen großen Einfluß hat. Dies dürfte dadurch zu erklären sein, daß bei der Entstehung der Bodenschichten eine Ausrichtung der Teilchen erfolgte.

¹ TJUTJUNNIK, P. M.: Vgl. Fußnote 1, S. 214.

² NEUBER, H., u. R. WOLTERS: Zeitschrift d. Dt. Geol. Ges. (1961) Bd. 114/II, S. 303.